40

Ma. o. 40

Leitfaden

zum

Unterrichte

in der

elementaren Mathematik.

Für

seine Schüler entworfen

von

Dr. Georg Mayer,

Professor am alten Gymnasium in München.

Dritte Auflage.

Mit 4 Figurentafeln.

München, 1847.

Joseph Lindauer'sche Buchhandlung.

(C. T. Fr. Sauer.)

BIBLIOTHECA
CIVITATIS
BAMBERGENSIS.

Vorwort

zur dritten Auflage.

Der Hauptgesichtspunkt, den der Verfasser bei Ausarbeitung des vorliegenden Leitfadens ursprünglich sich gesetzt hatte, wurde auch bei dieser dritten Auflage unverrückt behalten, nemlich die Gesetze der Arithmetik, so wie die Sätze der Geometrie in systematischer Ordnung mit den nothwendigen Beweisen, die theils ausführlich gegeben, theils nur in ihrem Hauptgange angedeutet sind, zusammenzustellen, die weitere Ausführung aber, so wie Uebungen im Kalkul dem mündlichen Vortrage zu überlassen; Meier Hirsch, Heis, Arndt, Pollak und andere haben durch ihre Werke die Anhäufung von arithmetischen Aufgaben in den Lehrbüchern überflüssig gemacht, so wie von Swinden's Elemente der Geometrie mit den Anhängen von Jakobi eine wahre Fundgrube geometrischer Lehrsätze und Aufgaben sind.

Die in der dritten Auflage gemachten Aenderungen betreffen vorzüglich die ersten Abschnitte über analytische Gleichungen, so wie einige Sätze in der Geometrie, sind aber im Ganzen zu unbedeutend, als daß sie für wesentliche Aenderungen angesehen werden könnten.

Sätze über harmonische Punkte und Verhältnisse, die sich in neuern Lehrbüchern häufig finden, wurden nicht aufgenommen; denn die dem mathematischen Unterrichte am Gymnasium zugetheilte Zeit reicht kaum hin, das hier Gegebene gründlich und ausführlich zu behandeln.

München, im August 1847.

Der Verfasser.

Inhaltsanzeige.

Erste Abtheilung.

Arithmetik.

Seite

Einleitung 1

I. Analytische Gleichungen.

Erster Abschnitt. Addition und Subtraktion 3
Zweiter Abschnitt. Multiplikation und Division 9
Dritter Abschnitt. Potenziren 27
Zahlensystem 30
Radiziren 42
Quadrat und Quadratwurzel . . . 46
Kubus und Kubikwurzel 55
Logarithmiren 58

II. Algebraische Gleichungen.

Erster Abschnitt. Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten . 65
Zweiter Abschnitt. Einfache Gleichungen mit mehrern Unbekannten 72
Unbestimmte Gleichungen 81
Dritter Abschnitt. Gleichung zweier Differenzen und zweier Quotienten 86
Vierter Abschnitt. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten 93
Fünfter Abschnitt. Quadratische Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten 102
Sechster Abschnitt. Progressionen 111

Zweite Abtheilung.

Geometrie.

Seite

Einleitung 119

I. Ebene Geometrie.

Erster Abschnitt. Schneidende und parallele Linien. Figuren . 120
Zweiter Abschnitt. Kongruenz der Figuren 129
Dritter Abschnitt. Gleichheit der Figuren. Verhältniß der Figuren und Linien 140
Vierter Abschnitt. Aehnlichkeit der Figuren 150
Fünfter Abschnitt. Vom Kreise und von regulären Vielecken . 160
Sechster Abschnitt. Messung der Winkel, Linien und Flächen . 174

II. Stereometrie.

Erster Abschnitt. Lage gerader Linien und Ebenen gegen einander 182
A. Lage gerader Linien gegen Ebenen . . 182
B. Lage der Ebenen gegen einander . . 188
Zweiter Abschnitt. Vom körperlichen Winkel und körperlichen Dreiecken 193
Dritter Abschnitt. Von Körpern überhaupt; reguläre Körper; Gleichheit und Verhältniß der Prismen und der Pyramiden 199
Vierter Abschnitt. Cylinder. Kegel. Kugel 213
Fünfter Abschnitt. Messung der Körper 226

Druck von Matth. Pössenbacher.

Erste Abtheilung.

Arithmetik.

Einleitung.

1. Größe ist Alles, was vermehrt und vermindert werden kann.

Man unterscheidet zwei Arten von Größen, nemlich: stetige, die man nicht getheilt denken kann, ohne daß nicht das Ende des einen Theils zugleich der Anfang des andern Theils ist; und diskrete, die bloß nach ihrer Menge betrachtet werden.

2. Die Betrachtung diskreter Größen (als gleichartig d. h. unter einem gemeinschaftlichen Begriffe gedacht) rücksichtlich ihrer Menge gibt die (benannte) Zahl, wovon wir die (unbenannte) Zahl überhaupt abstrahiren.

Stetige Größen können entweder mit ihren Grenzen zusammenfallend gedacht werden, oder werden gemessen; dieß Maß wird ebenfalls als (benannte) Zahl in Beziehung auf eine bestimmte Einheit ausgedrückt.

3. Die Wissenschaft, welche die Verbindung und Vergleichung der Größen, und der von der Größe abstrahirten Zahl untersucht, heißt Mathematik.

Ihre Haupttheile sind:

a. Arithmetik (im weitesten Sinne) lehrt uns die Gesetze der Zahlen-Verbindung und Vergleichung.

b. Geometrie beschäftigt sich mit Vergleichung und Messung stetiger Größen im Raume; so wie

c. Mechanik die Gesetze der Kraftgrößen untersucht.

4. Zur Bezeichnung bestimmter Zahlen (einer bestimmten Menge von Einheiten) hat man eigene Zeichen, die sogenannten arabischen Ziffern, die zu diesem Zwecke künstlich (durch das Zahlensystem) verbunden werden.

Um die Gesetze der Zahlenverbindungen allgemein darzustellen, müssen wir auch allgemeine Zahlzeichen haben, d. h. solche Zeichen, die an und für sich keine bestimmte Zahl ausdrücken, aber eben deßwegen als Repräsentanten jeder Zahl gelten können.

Gewöhnlich bedient man sich hiezu der Buchstaben des lateinischen, wohl auch griechischen Alphabets.

5. Jedes allgemeine Zahlzeichen, (so wie später jedes Zeichen, welches die Form eines Zahlzeichens hat,) heißt ein Ausdruck.

Bezeichnen zwei Ausdrücke die nemliche Zahl, so heißen sie gleich, und verbindet man zwei gleiche Ausdrücke durch das Gleichheitszeichen, so erhält man eine Gleichung;

$$a = b$$

heißt: a ist gleich b; d. h. die durch a ausgedrückte Zahl ist der durch b ausgedrückten Zahl gleich. Gleiche Ausdrücke können für einander gesetzt werden.

Noch allgemeiner könnte man also zwei Ausdrücke gleich heißen, die unbeschadet der Richtigkeit einer Zahlenverbindung für einander gesetzt werden können.

Eine Verbindung zweier ungleicher Ausdrücke heißt eine Ungleichung; $a > b$ heißt: a ist größer als b, oder b ist kleiner als a.

Eine Gleichung (oder Ungleichung) hat immer zwei (durch $=$ oder $>$) getrennte Seiten.

Die Umwandlung von Ausdrücken in andere gleiche Ausdrücke nach den Gesetzen der Zahlenverbindung heißt Kalkul; die verschiedenen Arten der Verbindungen heißen wohl auch Operationen.

6. Wenn zwei Seiten einer Gleichung unbedingt gleich sind, d. h. wenn die beiden Seiten einander gleich bleiben, welche beliebige bestimmte Zahlen man auch statt der allgemeinen setzen mag, mithin der Werth jeder einzelnen Zahl von dem Werthe der übrigen unabhängig ist, so heißt die Gleichung analytisch.

Sind aber die beiden Seiten nur bedingt gleich; so daß der Werth einer Zahl von dem Werthe der übrigen abhängig ist, so heißt die Gleichung algebraisch.

Wir betrachten zuerst die analytischen, dann die algebraischen Gleichungen.

I. Analytische Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Addition und Subtraktion.

§. 1. Erklärung. Eine Zahl angeben, die zwei gegebenen Zahlen zusammengenommen gleich ist, heißt addiren. Die zwei gegebenen Zahlen heißen Summanden; die gesuchte Zahl, oder vielmehr das allgemeine Zeichen für sie, heißt Summe. Das zwischen die Summanden gesetzte Zeichen, welches die Addition andeutet, heißt plus (+).

$(a+b)$ ist also der allgemeine Ausdruck einer Summe, in welcher a und b Summanden sind. Summand und Summand addirt gibt die Summe.

Anmerk. 1. Die Summe zweier Zahlen ist offenbar wieder eine Zahl, man kann daher setzen: $(a+b)=c$; bei welcher Annahme wir voraussetzen, die Zahl c enthalte so viele Einheiten, als die Zahlen a und b zusammengenommen.

Anmerk. 2. Man bedient sich der Klammern () oder [], um anzudeuten, daß die Verbindung von zwei oder mehr Zahlen als eine Zahl betrachtet werden soll, oder um anzuzeigen, daß die Verbindung der zwischen ihnen stehenden Zahlen näher sey, als ihre Verbindung mit andern Zahlen. Sie bestimmen also, in welcher Ordnung die angedeuteten Operationen ausgeführt werden sollen. Wegfallen können sie, wenn nach ihrer Weglassung die nemliche Zahlenverbindung noch erkennbar ist, welche durch die Klammern angedeutet wurde; hiebei wird allgemein angenommen, die Verbindung zweier Zahlen sey um so näher, je höher sie ist.

§. 2. Folgesatz. Da die Summe $(a+b)$ offenbar die nemliche bleibt, ich mag die Zahl b zur Zahl a, oder umgekehrt, addiren, so hat man

$$(a+b)=(b+a) \quad [1]$$

d. h. in einer Summe kann man die Summanden beliebig vertauschen.

§. 3. Folgesatz. Aus dem Begriffe der Addition (§. 1) folgt mit Rücksicht auf das Gesetz (1):

$$(a+b)+c=(a+c)+b \quad [2]$$

d. h. zu einer Summe wird eine Zahl addirt, wenn man die Zahl zu einem beliebigen Summanden addirt, und zur erhaltenen Summe den andern Summanden addirt.

§. 4. Grundsatz. Hat man $a=b$, so folgt daraus:

$$a+c=b+c \quad [3]$$

d. h. Gleiches zu Gleichem addirt gibt gleiche Summen. Umgekehrt: Sind in zwei gleichen Summen ein Paar Summanden gleich, so sind auch die andern Summanden gleich.

§. 5. Erkl. Ist eine Summe und der eine Summand gegeben, und man sucht den andern Summanden, so heißt dieß Subtraktion; die gegebene Summe heißt in diesem Falle Minuend; der gegebene Summand heißt Subtrahend (Subtraktor), und der gesuchte Summand wird Differenz (Rest) genannt. Das Zeichen der Subtraktion heißt minus (—). $a-b$ ist also der allgemeine Ausdruck einer Differenz, in welcher a der Minuend und b der Subtrahend ist. Vom Minuend den Subtrahend subtrahirt gibt die Differenz.

Anmerk. Die Differenz zweier Zahlen kann wieder als Zahl betrachtet werden.

§. 6. Vertauschen wir die in den Erklärungen §. 1. § 5. vorkommenden gleichgeltenden Benennungen, so ergeben sich folgende Sätze:

1. Zur Differenz den Subtrahend addirt, gibt den Minuend; d. i.

$$(a-b)+b=a \quad [4].$$

2. Von einer Summe den einen Summanden abgezogen gibt den andern Summanden; d. i.

$$(a+b)-b=a \quad [5].$$

Zus. Aus [4] leitet sich eine allgemeinere Erklärung der Subtraktion ab: Subtrahiren heißt einen Ausdruck suchen, der zum Subtrahend addirt, den Minuend gibt.

§. 7. Grunds. Ist gegeben: $a=b$; so folgt:

$$(a-m)=(b-m) \quad [6]$$

d. h. Gleiches von Gleichem subtrahirt gibt Gleiches.

Umgekehrt. Sind in zwei gleichen Differenzen die {Minuenden / Subtrahenden} gleich, so sind auch die {Subtrahenden / Minuenden} gleich.

§. 8. Die Sätze [1] bis [6] incl. sind Hauptsätze der Addition und Subtraktion; aus diesen ergeben sich nun die folgenden

Lehrsätze. 1. $a+(b-c)=(a+b)-c$ [7]

d. h. zu einer Zahl wird eine Differenz addirt, wenn man zur Zahl den Minuend addirt, und von der erhaltenen Summe den Subtrahend subtrahirt.

Zum Beweise dieses Satzes addiren wir zu jedem dieser als gleich zu erweisenden Ausdrücke die Zahl c, so haben wir

$[a+(b-c)]+c=a+[(b-c)+c][2]=a+b(4)$

$[(a+b)-c]+c=a+b(4)$.

Da nun zwei Ausdrücke, die einem dritten gleich sind, auch unter sich gleich sind, so hat man

$[a+(b-c)]+c=[(a+b)-c]+c$; daraus folgt:

$$a+(b-c=(a+b)-c \quad (3 \text{ umgekehrt.})$$

Zus. Da die unter [7] als gleich bewiesenen Ausdrücke gleich bleiben, in welcher Ordnung wir sie auch nehmen mögen, so können wir den Ausdruck: $(a+b)-c$ voraus stellen und den andern Ausdruck daraus folgern, wodurch wir folgenden Satz erhalten: Von einer Summe wird eine Zahl subtrahirt, wenn man die Zahl von einem Summanden subtrahirt, und zur erhaltenen Differenz den andern Summanden addirt.

2. $a-(b+c)=(a-b)-c$ [8]

d. h. Von einer Zahl wird eine Summe subtrahirt, wenn man von der Zahl den einen Summanden sub-

trahirt, und von der erhaltenen Differenz den andern Summanden subtrahirt.

Zum Beweise addiren wir zu jedem dieser Ausdrücke die Summe der beiden Subtrahenden (b+c)+c, dann haben wir: (a—(b+c))+[(b+c)+c]=[(a—(b+c))+(b+c)]+c(2)= a+c (4).

[(a—b)—c]+[(b+c)+c]=([(a—b)—c]+c)+(b+c)(2)= (a—b)+(b+c)(4)=((a—b)+b)+c)(2)=a+c (4).

Daraus folgt:

[a—(b+c)]+[(b+c)+c]+[(a—b)—c]+[(b+c)+c].

Und hieraus ergibt sich (nach (3) umgekehrt)

a—(b+c)=(a—b)—c

Zus. Von einer Differenz wird eine Zahl subtrahirt, wenn man die Summe der Zahl und des Subtrahends vom Minuend subtrahirt.

3. a—(b—c)=(a—b)+c [9]

d. h. von einer Zahl wird eine Differenz subtrahirt wenn man den Minuend von der Zahl subtrahirt, und zur erhaltenen Differenz den Subtrahend addirt.

Zum Beweise addire man zu jedem der als gleich gesetzten Ausdrücke die Differenz (b—c), und verfahre wie oben.

§. 9. Lehrsatz. Eine Differenz wird nicht geändert, wenn man zum Minuend und Subtrahend Gleiches addirt, oder davon Gleiches subtrahirt d. i.

a—b=(a+c)—(b+c)=(a—c)—(b—c) [10]

Beweis wie oben.

§ 10. Lehrsätze. Betrachtet man die Subtraktion nach §. 6 Zus., so können noch folgende zwei Fälle statt finden. Es kann nemlich 1. in einer Differenz Minuend und Subtrahend einander gleich seyn. Solche Differenzen sind alle einander gleich, und ihr gemeinschaftlicher Stellvertreter ist Null (o); d. i.

(a—a)=(b—b)=(o) [11]

Um dieß zu beweisen, addiren wir zu jedem Ausdruck $a+b$ dann hat man:

$(a-a)+(a+b)=[(a-a)+a]+b(2)=a+b(4)$

$(b-b)+(a+b)=[(b-b)+b]+a(2)=b+a(4)=a+b(1)$

daher:

$$(a-a)+(a+b)=(b-b)+(a+b); \text{ folglich:}$$

$$a-a=b-b \text{ (3 umgekehrt)}$$

Eine solche Differenz (oder ihr Stellvertreter Null) zu einer Zahl addirt, oder von ihr subtrahirt ändert die Zahl nicht; d. i.

$$a+(b-b)=a-(b-b)=a+o=a-o=a \quad [\mathbf{12}]$$

Es kann aber 2. der Subtrahend größer seyn, als der Minuend. In diesem Falle läßt sich der Subtrahend immer in zwei Zahlen auflösen, von denen die eine dem Minuend gleich ist; dieser Fall ist unter der Form: $a-(a+b)$ enthalten. Nun ist aber:

$$a-(a+b)=(a-a)-b(8)=o-b(11)=-b \quad [\mathbf{13}]$$

Das Resultat $(-b)$ heißt nun ein negativer Ausdruck und b dessen Glied.

Ein negativer Ausdruck ist daher eine Differenz, deren Minuend Null ist.

Zus. In dieser Beziehung heißt $(+b)$, wofür auch $(o+b)$ nach (12) stehen kann, ein positiver Ausdruck, oder eine Summe, in welcher der eine Summand Null ist.

§. 11. Zusätze.

1. $a+(-b)=a+(o-b)(13)=(a+o)-b(7)\ (=a-b(12)$

d. h. Zu einer Zahl wird ein negativer Ausdruck addirt, wenn man von der Zahl das Glied des negativen Ausdrucks subtrahirt; also

$$a+(-b)=a-b \quad [\mathbf{14}].$$

Umgekehrt: eine Differenz wird in eine Summe verwandelt, wenn man zum Minuend einen negativen Ausdruck addirt, dessen Glied der Subtrahend ist.

2. $a-(-b)=a+b \quad [\mathbf{15}]$

d. h. Von einer Zahl wird ein negativer Ausdruck subtrahirt, wenn man zur Zahl das Glied des negativen Ausdrucks addirt.

Umgekehrt: Eine Summe wird in eine Differenz verwandelt, wenn man von dem einen Summand einen negativen Ausdruck subtrahirt, dessen Glied der andere Summand ist.

3. $(-a)+(-b)=-(a+b)$ [16]

d. h. Zwei negative Ausdrücke werden addirt, wenn man die Summe ihrer Glieder zum Glied eines negativen Ausdruckes macht.

4. $-(a-b)=b-a$ [17]

d. h. man erhält den Werth einer Differenz, die Glied eines negativen Ausdrucks ist, wenn man die Differenz umkehrt.

Umgekehrt: eine Differenz kann man umkehren, wenn man sie zum Glied eines negativen Ausdrucks macht.

§. 12. Wenn man in einem zusammengesetzten Ausdrucke, wie:

$$a-([(b+c)-(m-x)]-(p+q))$$

die Klammern nach den Gesetzen 2, 7, 8 und 9 vorschafft, so erhält man:

$$((((a-b)-c)+m)-x)+p)+q.$$

Läßt man nun alle Klammern weg, so erhält man:

$$a-b-c+m-x+p+q$$

Dieser letzte Ausdruck nun heißt ein Aggregat (oder eine algebraische Summe), in welchem a, b, c . . . Glieder genannt werden.

§. 13. Jedes Aggregat läßt sich in eine Differenz zweier Summen oder in eine reine Summe verwandeln; im ersten Falle geht das in §. 12 gegebene Aggregat über in:

$$(a+m+p+q)-(b+c+x).$$

Im zweiten Falle aber erhält man:

$$a+(-b)+(-c)+m+(-x)+p+q.$$

§. 14. 1. Um das Gesetz zu finden, wie zu einer Zahl ein Aggregat addirt werde, d. h. um einen Ausdruck wie:

$$a+(b-c+d-x)$$

in ein Aggregat zu verwandeln, setzen wir (nach §. 12)

$$a+(b-c+d-x)=a+([(b-c)+d]-x).$$

Schaffen wir auf der zweiten Seite dieser Gleichung die Klammern vor, und lassen sie dann weg, so erhalten wir:

$$a+(b-c+d-x)=a+b-c+d-x \quad [\mathbf{18}]$$

d. h. *Zu einer Zahl wird ein Aggregat addirt, wenn man* (die das Aggregat einschließenden Klammern weglassend) *die Glieder des Aggregats zur Zahl hinzusetzt.*

2. Auf dieselbe Weise findet man:

$$a-(c-d-m+x)=a-c+d+m-x \quad [\mathbf{19}]$$

d. h. Von einer Zahl wird ein Aggregat subtrahirt, wenn man die Glieder des Aggregats (unter Weglassung der dasselbe einschließenden Klammern) mit veränderten Zeichen zur Zahl hinzusetzt.

Zweiter Abschnitt.

Multiplikation und Division.

§. 15. *Erklärung.* Eine Zahl so oft als Summand setzen, als eine zweite Zahl Einheiten enthält, heißt *multipliziren*; die erste Zahl heißt *Multiplikand*, die zweite *Multiplikator*; das dadurch gewonnene Resultat heißt *Produkt*. Der allgemeine Ausdruck eines Produktes ist: $(a \times b)$ oder $(a . b)$ oder (ab); a ist Multiplikand, b ist Multiplikator. Da jede Zahl eine Menge von Einheiten ist, so läßt sich die Multiplikation folgendermassen anschaulich darstellen:

$$\begin{array}{cl} & \text{a mal} \\ & 1+1+1+1+\ldots\ldots \\ \text{b mal} & 1+1+1+1+\ldots\ldots \\ & 1+1+1+1+\ldots\ldots \\ & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \end{array}$$

Nach dem aufgestellten Begriffe der Multiplikation erhält man die das Produkt darstellende Zahl, wenn man alle hier angezcigten Einheiten als *eine* Zahl zusammenfaßt; diese Zahl ist aber offenbar die nemliche, ich mag a b mal nehmen (horizontal gezählt), oder b a mal (vertikal gezählt); daraus ergibt sich der

Satz: Multiplikand und Multiplikator kann man beliebig vertauschen; d. i.

$$(a.b)=(b.a) \quad [20].$$

Aus diesem Grunde heißen wir jede dieser Zahlen Faktor; Faktor mit Faktor multiplizirt gibt das Produkt.

Zus. Ist in einem Produkte der eine Faktor die Einheit, so ist das Produkt dem andern Faktor gleich, d. h. $1.a=a$ [21].

Umgekehrt: jede Zahl läßt sich in ein Produkt verwandeln, wenn man ihr den Faktor 1 gibt.

Anmerk. 1. Den einen Faktor eines Produktes heißt man wohl auch Coëffizient, zumal, wenn er eine bestimmte Zahl ist.

Anmerk. 2. Das Produkt zweier Zahlen gibt wieder eine Zahl.

§. 16. Hat man das Produkt von mehr als zwei Faktoren, anzugeben, so betrachtet man das Produkt zweier Zahlen als eine Zahl; diese Zahl wird als Faktor mit dem nächsten Faktor multiplizirt u. s. f., d. i.

$$(ab)\,c=(ac)\,b \quad [22]$$

Ein Produkt wird also mit einer Zahl multiplizirt, wenn man die Zahl mit dem einen Faktor, und das erhaltene Produkt mit dem andern Faktor multiplizirt.

§. 17. Grundsatz. Hat man: $a=b$; so ist auch:

$$(a\,c)=(b\,c) \quad [23]$$

d. h. Gleiches mit Gleichem multiplizirt gibt Gleiches.

Umgekehrt: haben zwei gleiche Produkte einen Faktor gleich, so sind auch die andern Faktoren gleich.

§. 18. Lehrsatz. Da von den gegebenen Faktoren der eine (oder beide) unter der Form einer Summe oder Differenz erscheinen kann, so wollen wir untersuchen, wie man eine Zahl 1. mit einer Summe, 2. mit einer Differenz multiplizirt.

1. Ist gegeben: $a(b+c)$, so hat man (nach §. 15)
$(b+c)+(b+c)+(b+c)+\ldots$ a mal, oder
$b+c+b+c+b+c+\ldots$ a mal, (§. 12) oder
$(b+b+b+\ldots$ a mal$)+(c+c+c+\ldots$ a mal$)$, d. i.

$$b.a+c.a;\ \text{daher}$$

$$a(b+c)=(a\,b)+(a\,c) \quad [24]$$

d. h. eine Zahl wird mit einer Summe multiplizirt, wenn man die Zahl mit jedem Summanden multiplizirt, und die erhaltenen Produkte addirt.

Umgekehrt heißt der Satz:

Zwei Produkte, die einen gemeinschaftlichen Faktor haben, werden addirt, wenn man die Summe der nicht gemeinschaftlichen Faktoren mit dem gemeinschaftlichen Faktor multiplizirt.

2. Ist gegeben: $a(b-c)$; so hat man, wie vorher,

$(b-c)+(b-c)+(b-c)-\ldots$ a mal, oder

$b-c+b-c+b-c+\ldots$ a mal, oder

$(b+b+b+\ldots$ a mal$)-(c+c+c+\ldots$ a mal$)$, d. ist

$$b.a-c.a; \text{ daher}$$

$$a(b-c)=(a\,b)-(a\,c) \quad [25]$$

d. h. eine Zahl wird mit einer Differenz multiplizirt, wenn man die Zahl mit dem Minuend und Subtrahend multiplizirt, und das zweite Produkt vom ersten subtrahirt.

Umgekehrt heißt der Satz:

Zwei Produkte die einen gleichen Faktor haben, werden subtrahirt, wenn man vom ungleichen Faktor des Minuends den ungleichen Faktor des Subtrahends subtrahirt, und diese Differenz mit dem gleichen Faktor multiplizirt.

Zus. 1. $a\times o=o$ [26]

d. h. ein Produkt ist Null, wenn ein Faktor desselben Null ist; denn:

$$a\times o=a(b-b)=ab-ab=o$$

Zus. 2. $a.(-b)=-(ab)$ [27]

Zus. 3. $(-a)(-b)=ab$ [28]

§. 19. Um das Produkt zweier Summen zu erhalten, betrachtet man die eine Summe als Zahl, und wendet dann das Gesetz (24) an; daher hat man:

$$(a+b)(c+d)=(a+b)c+(a+b)d=ac+bc+ad+bd$$

Auf dieselbe Weise erhält man das Produkt zweier Differenzen (oder einer Summe und Differenz) nach (25); es ist also:

$(a-x)(b-y)=((a-x)b)-((a-x)y)=(ab-bx)-(ay-xy)$
$=ab-bx-ay+xy$

§. 20. Um das Produkt aus einer Zahl und einem Aggregate zu erhalten, verwandelt man das Aggregat in eine Differenz zweier Summen (§. 13) und wendet dann das Gesetz (25) an; oder man verwandelt das Aggregat in eine reine Summe, und verfährt nach (24) mit Rücksicht auf (27); in diesem Falle hat man also:

$a.(b-c+x-y)=a.(b+(-c)+x+(-y))=$
$ab+(-ac)+ax+(-ay)=ab-ac+ax-ay$ (14)

§. 21. Hat man das Produkt zweier Aggregate zu entwickeln, so verwandelt man jedes Aggregat in eine Differenz, und verfährt nach §. 19; oder man verwandelt jedes Aggregat in eine reine Summe, und wendet das Gesetz (24) an, indem man das eine Aggregat als Zahl betrachtet. Man hat daher $(3a-7b+4x)(2a+3b-x)=[3a+(-7b)+4x]\,[2a+3b+(-x)]$ $=(3a+(-7b)+4x)2a+(3a+(-7b)+4x)3b+[3a+(-7b)+4x](-x)=[6aa+(-14ab)+8ax]+[9ab+(-21bb)+12bx]+[(-3ax)+7bx+(-4xx)]$. Nach gehöriger Vereinfachung erhält man: $6aa-5ab+5ax-21bb+19bx-4xx$. Hieraus ergibt sich für das Produkt zweier Aggregate folgende Regel:

Zwei Aggregate werden multiplizirt, wenn man mit jedem Gliede des einen Aggregates jedes Glied des andern Aggregates multiplizirt, und die erhaltenen Produkte mit Rücksicht auf die negativen Ausdrücke addirt. Gewöhnlich gibt man der Operation folgende einfache Form:

$$\begin{array}{l} \quad 3a-7b+4x \\ \quad 2a+3b-x \\ \hline 6aa-14ab+8ax \\ \qquad\quad +9ab-21bb+12bx \\ \qquad\qquad\qquad -3ax+7bx-4xx \\ \hline 6aa-5ab+5ax-21bb+19bx-4xx \end{array}$$

§. 22. Erklärung. Ist ein Produkt, und der eine Faktor gegeben, und man sucht den andern Faktor, so heißt dieß

dividiren; das gegebene Produkt heißt Dividend; der gegebene Faktor Divisor, und der gesuchte Faktor heißt Quotient (Quotus). Der allgemeine Ausdruck eines Quotienten ist: $\left(\frac{a}{b}\right)$ oder (a:b), in welchem a Dividend, b Divisor ist. Dividend durch Divisor dividirt gibt den Quotienten.

Anmerk. Der Quotient zweier Zahlen kann wieder als Zahl betrachtet werden.

§. 23. Vergleichen wir §. 15, §. 22, so erhalten wir unmittelbar folgende Sätze:

1. $\left(\frac{a}{b}\right) b = a$ [29]

d. h. Quotient mit Divisor multiplizirt gibt den Dividend.

2. $\frac{(a\,b)}{b} = a$ [30]

d. h. ein Produkt durch einen Faktor dividirt gibt den andern Faktor.

Zus. 1. Aus (29) leitet sich eine allgemeinere Erklärung der Division ab: Dividiren heißt, einen Ausdruck finden, der mit dem Divisor multiplizirt den Dividend gibt.

Zus. 2 Ist daher in einem Quotienten der Divisor die Einheit, so ist der Quotient dem Dividenden gleich, d. i.

$$\frac{a}{1} = a \quad [31]$$

Zus. 3. Ist in einem Quotienten der Dividend dem Divisor gleich, so ist der Quotient der Einheit gleich, d. i.

$$\frac{a}{a} = 1 \quad [32].$$

§. 24. Grundsatz. Hat man: a=b, so ist auch

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{c} \quad [33]$$

d. h. Gleiches durch Gleiches dividirt, gibt Gleiches.

Umgekehrt: sind in zwei gleichen Quotienten

die $\left\{\begin{matrix}\text{Dividende}\\\text{Divisoren}\end{matrix}\right\}$ gleich, so sind auch die $\left\{\begin{matrix}\text{Divisoren}\\\text{Dividende}\end{matrix}\right\}$ gleich.

§. 25. Lehrsätze. 1. $a\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{(ab)}{c}$ **[34]**

d. h. eine Zahl wird mit einem Quotienten multiplizirt, wenn man die Zahl mit dem Dividende multiplizirt, und das erhaltene Produkt durch den Divisor dividirt.

Zum Beweise dieses Satzes multipliziren wir jeden dieser, als gleich behaupteten, Ausdrücke mit c, so hat man

$$\left(a\left(\frac{b}{c}\right)\right)c=a\left(\left(\frac{b}{c}\right)c\right)(22)=ab(29)$$

$\left(\frac{(ab)}{c}\right)c=ab$ (29); daraus folgt:

$\left(a\left(\frac{b}{c}\right)\right)c=\left(\frac{(a\,b)}{c}\right)c$; hieraus folgt (23 umgekehrt)

$$a\left(\frac{b}{c}\right)=\frac{(a\,b)}{c}.$$

Umgekehrt: Ein Produkt wird durch eine Zahl dividirt, wenn man einen Faktor durch die Zahl dividirt und den erhaltenen Quotienten mit dem andern Faktor multiplizirt.

2. $\frac{a}{bc}=\left(\frac{a}{b}\right):c$ **[35]**

d. h. eine Zahl wird durch ein Produkt dividirt, wenn man die Zahl durch den einen Faktor dividirt, und den erhaltenen Quotienten durch den andern Faktor dividirt.

Zum Beweise multiplizire man jeden dieser Ausdrücke mit dem Produkte der beiden Dividenden, nemlich mit (bc).c, und verfahre dann weiter wie bei 1.

Umgekehrt: Ein Quotient wird durch eine Zahl dividirt, wenn man den Dividend dividirt durch das Produkt der Zahl und des Divisors.

3. $a:\left(\frac{b}{c}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)c$ **[36]**

d. h. Eine Zahl wird durch einen Quotienten dividirt, wenn man die Zahl durch den Dividend divi-

dirt, und den erhaltenen Quotienten mit dem Divisor multiplizirt.

Der Beweis wird auf ähnliche Weise geführt, wie bei den vorausgehenden Sätzen.

§. 26. Zusätze. Das Produkt, so wie der Quotient zweier Quotienten läßt sich auf die in §. 25 aufgestellten Lehrsätze zurückführen. Man hat nemlich:

1. $\left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right) = \left[\left(\frac{a}{b}\right)c\right] : d = \left(\frac{ac}{b}\right) : d = \frac{ac}{bd}$ [37]

d. h. Zwei Quotienten werden multiplizirt, wenn man das Produkt der beiden Dividenden dividirt durch das Produkt der beiden Divisoren.

Umgekehrt: Zwei Produkte werden durcheinander dividirt, wenn man je einen Faktor des Dividends dividirt durch je einen Faktor des Divisors und die erhaltenen Quotienten miteinander multiplizirt.

2. $\left(\frac{a}{b}\right) : \left(\frac{c}{d}\right) = \left[\left(\frac{a}{b}\right) : c\right] d = \frac{a}{bc} \cdot d = \frac{ad}{bc}$ [38]

d. h. Zwei Quotienten werden durch einander dividirt, wenn man den Dividend-Quotienten multiplizirt mit dem umgekehrten Divisor-Quotienten; denn $\frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}$.

Anmerk. a und $\frac{1}{a}$ heißen gegenseitig reciproke Zahlen; eben so $\frac{b}{c}$ und $\frac{c}{b}$; man kann daher das eben aufgestellte Gesetz (38) auch so ausdrücken:

Zwei Quotienten werden durcheinander dividirt, wenn man den Dividend-Quotienten multiplizirt mit der reciproken Zahl des Divisor-Quotienten.

§. 27. Für den Fall, daß der Dividend unter der Form einer Summe oder Differenz gegeben ist, gelten folgende

Lehrsätze. 1. $\left(\frac{a+b}{c}\right)=\left(\frac{a}{c}\right)+\left(\frac{b}{c}\right)$ [39]

d. h. eine Summe wird durch eine Zahl dividirt, wenn man jeden Summand durch die Zahl dividirt und die erhaltenen Quotienten addirt.

Zum Beweise multiplizire beiderseits mit c; das Uebrige wie oben.

Umgekehrt heißt der Satz:

Man erhält die Summe zweier Quotienten, die denselben Divisor haben, wenn man die Summe ihrer Dividende durch den gemeinschaftlichen Divisor dividirt.

2. $\frac{(a-b)}{c}=\left(\frac{a}{c}\right)-\left(\frac{b}{c}\right)$ [40]

d. h. eine Differenz wird durch eine Zahl dividirt, wenn man sowohl Minuend als Subtrahend durch die Zahl dividirt, und den letztern Quotienten vom erstern subtrahirt.

Zum Beweise multiplizire man beiderseits mit c.

Umgekehrt heißt der Satz:

Man erhält die Differenz zweier Quotienten die denselben Divisor haben, wenn man vom Dividend des Minuends subtrahirt den Dividend des Subtrahends, und diese Differenz mit dem gleichen Divisor dividirt.

Zus. 1. $\frac{o}{a}=o$ [41] d. h. Ein Quotient, dessen Dividend Null ist, ist selbst Null; denn:

$$\frac{o}{a}=\frac{b-b}{a}=\frac{b}{a}-\frac{b}{a}=o$$

Zus. 2. $\frac{-b}{a}=-\left(\frac{b}{a}\right)$ [42]

§. 28. Lehrs. Ein Quotient wird nicht geändert, wenn man Dividend und Divisor mit der nemlichen Zahl multiplizirt, oder durch die nemliche Zahl dividirt; d. i.

$$\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, c}{b \,.\, c} = \frac{(a:c)}{(b:c)} \quad [43]$$

Zum Beweise multiplizire man jeden Ausdruck mit (bc) oder mit (b:c).

§. 29. Lehrsatz: $\frac{a}{-b} = -\left(\frac{a}{b}\right)$ [44]

d. h. Eine Zahl wird durch einen negativen Ausdruck dividirt, wenn man die Zahl durch das Glied des negativen Ausdruckes dividirt, und den Quotienten zum Glied eines negativen Ausdruckes macht.

Zum Beweise multiplizire man jeden der beiden Ausdrücke mit (—b).

Zus. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$ [45]; d. h. Zwei negative Ausdrücke werden durcheinander dividirt, wenn man das Glied des Dividends durch das Glied des Divisors dividirt.

§. 30. Nun ist noch der Fall zu untersuchen, wenn in einem Quotienten der Divisor eine Summe oder Differenz (Aggregat) ist; offenbar muß auch der Dividend eine Summe oder Differenz seyn, wenn anders der Quotient einer weitern Entwicklung fähig seyn soll. (Man vergleiche §§. 19. und 23.

Zus. 1). Sey nun allgemein der Quotient: $\frac{a}{b}$ zu entwickeln, so ist:

$$\frac{a}{b} = m + \frac{a - bm}{b} \quad [46]$$

d. h. Um einen Quotienten in eine Summe zu zerlegen, nimmt man als ersten Summanden eine willkührliche Zahl; den zweiten Summanden erhält man, wenn man vom gegebenen Dividend subtrahirt das Produkt der willkührlichen Zahl und des Divisors, diese Differenz aber durch den Divisor dividirt.

Zum Beweise multiplizire man beiderseits mit b. Nach die-

sem Satze läßt sich der zweite Quotient wieder zerlegen: denn man hat:

$$\frac{a-bm}{b}=x+\frac{(a-bm)-bx}{b}$$

Entwickelt man nun auf die hier angezeigte Art nach und nach alle Glieder des Quotienten, bis die letzte Differenz Null ist, so hat man den vollständigen Quotienten gefunden. (Sollte die letzte Differenz oder der letzte Rest nicht weiter zerlegbar seyn, so bleibt dieser Quotient unentwickelt. (Hievon später.)

Nun ist nur noch nothwendig, immer das schickliche Glied des Quotienten zu finden, was in speziellen Fällen keine Schwierigkeit hat. Denn da das erste Glied des (geordneten) Dividends ein Produkt der ersten Glieder des (geordneten) Divisors und Quotienten ist, so erhält man allzeit das erste Glied des zu bestimmenden Quotienten, wenn man das erste Glied des Dividends durch das erste Glied des Divisors dividirt.

Um in einem Beispiele das ganze Verfahren anschaulich zu machen, habe man folgenden Quotienten zu entwickeln:

$$(ap-bp+cp-aq+bq-cq):(p-q).$$

Nach der so eben angeführten Darstellung steht nun die Rechnung so:

$$\frac{(ap-bp+cp-aq+bq-cq)}{(p-q)}=$$

$$a+\frac{(ap-bp+\ldots-cq)-a(p-q)}{(p-q)}=$$

$$a+\frac{(-bp+cp+bq-cq)}{p-q}=$$

$$a-b+\frac{(-bp+cp+bq-cq)-(p-q)(-b)}{(p-q)}=$$

$$a-b+\frac{(cp-cq)}{(p-q)}=a-b+c+\frac{(cp-cq)-c(p-q)}{(p-q)}=$$

$$a-b+c+\frac{0}{p-q}=a-b+c.$$

Der entwickelte Quotient heißt also: $a-b+c$, so daß jetzt folgende Gleichung statt findet:

$$(a-b+c)(p-q)=(ap-bp+cp-aq+bq-cq).$$

Die hier durchgeführte Operation wird jedoch in der Anwendung bedeutend abgekürzt, wie an folgendem Beispiele zu sehen ist, in welchem sowohl Dividend als Divisor bereits geordnet ist.

Hat man:

$$\frac{(12aa-10ab+17ax-8bb+14bx-5xx)}{(4a+2b-x)}$$

zu entwickeln, so hat die Ausführung gewöhnlich folgende Form:

$$\begin{array}{l}
(12aa-10ab+17ax-8bb+14bx-5xx)=3a-4b+5x \\
(4a+2b-x) \\
12aa+6ab-3ax \\
-\quad -\quad + \\
\hline
-16ab+20ax \\
-16ab-8bb+4bx \\
+\quad +\quad - \\
\hline
20ax+10bx \\
20ax+10bx-5xx \\
-\quad -\quad + \\
\hline
0
\end{array}$$

Zus. 1. Soll der Quotient für den Fall bestimmt werden, wenn der Divisor Null ist. so hat man: $\frac{a}{o}$; d. h. wir sollen einen Ausdruck finden, der mit Null multiplizirt a gibt. Diese Aufgabe ist (in den Elementen) nicht lösbar, da jeder Ausdruck mit Null multiplizirt Null gibt. (Vergl. §. 18. Zus. 1. und §. 23. Zus. 1.)

Zus. 2. Ist in einem Quotienten Dividend sowohl als Divisor Null, oder hat man: $\frac{o}{o}$, so soll ein Ausdruck gefunden werden, der mit Null multiplizirt, Null gibt; weil aber jeder mögliche Ausdruck dieser Forderung entspricht, so ist der Quotient unbestimmt.

Daraus geht also hervor, daß Null nie als Divisor gebraucht werden darf.

Anmerk. Multiplikation und Division sind beziehungsweise directe und indirecte Zahlen-Verbindungen der zweiten Stufe.

Anhang

zum ersten und zweiten Abschnitte.

§. 31. Die bisher aufgestellten Sätze wurden entweder unmittelbar aus den Erklärungen abgeleitet, oder ihre Richtigkeit wurde aus andern, als wahr anerkannten, Sätzen bewiesen; auf die Größe der Zahlen (der Menge der in einer Zahl zusammengefaßten Einheiten) wurde dabei keine Rücksicht genommen. Daher gelten jene Sätze allgemein, wenn auch die Verbindung der Zahlen auf Resultate führt, die keine Zahlen mehr sind. Eine solche Verbindung hat (außer der im §. 10. angeführten) statt, wenn in einem Quotienten der Dividend kleiner ist, als der Divisor; in diesem Falle heißt der Quotient gewöhnlich ein Bruch; der Dividend heißt Zähler; der Divisor Nenner; das Divisionszeichen wird dann Bruchzeichen genannt. Der Bruch ist also in dieser Beziehung ein spezieller Quotient, und kann als solcher im strengen Sinne nur vorhanden seyn, wenn Zähler und Nenner bestimmte Zahlen sind, und der Zähler kleiner als der Nenner ist. Doch wird der Name „Bruch" auch dann nicht ausgeschlossen, wenn der Zähler größer ist, als der Nenner, in welchem Falle der Bruch noch das Prädikat unächt erhält. Mit dieser Erweiterung des Begriffes von Bruch werden nun die Benennungen Dividend, Divisor und Quotient beziehungsweise identisch mit Zähler, Nenner und Bruch, und alle für Quotienten aufgestellten Gesetze gelten auch von Brüchen, so daß wir einer Lehre von den Brüchen in den Gesetzen für allgemeine Zahlen überhoben sind. Im Folgenden wollen wir statt Dividend, Divisor und Quotient die Benennungen Zähler, Nenner und Bruch gebrauchen.

§. 32. Nach den Sätzen [39], [40] werden Brüche mit

gleichem Nenner addirt oder subtrahirt, wenn man beziehungsweise die Summe oder Differenz der Zähler durch den gemeinschaftlichen Nenner dividirt. Es wird daher in den meisten Fällen zur Vereinfachung der Brüche sehr zweckdienlich seyn, Brüche, die nicht gleiche Nenner haben, auf einen gemeinschaftlichen Nenner zurückzuführen. Dazu benützen wir den Satz [43], nach welchem ein Bruch nicht geändert wird, wenn man dessen Zähler und Nenner mit der nemlichen Zahl multiplizirt.

Wir nehmen daher (im einfachsten Falle) als gemeinschaftlichen Nenner das Produkt aller Nenner; wir sehen dann leicht, mit welcher Zahl der Nenner jedes einzelnen Bruches multiplizirt ist, um in den allgemeinen Nenner überzugehen; mit der nemlichen Zahl wird dann auch der Zähler multiplizirt.

Es sollen z. B. die Brüche:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{m}{p}+\frac{x}{y}$$

auf gemeinschaftlichen Nenner gebracht werden. Dieser gemeinschaftliche Nenner ist hier offenbar bdpy, als das Produkt aller Nenner. Will ich nun den Bruch $\frac{a}{b}$, unbeschadet seines Werthes, in einen andern verwandeln, dessen Nenner bdpy ist, so muß ich den Nenner b offenbar mit dpy multipliziren; damit aber der Bruch in seiner neuen Form noch der nemliche sey, muß ich eben deswegen auch den Zähler a mit dpy multipliziren; man erhält also $\frac{a}{b}=\frac{adpy}{bdpy}$; und so verhält es sich mit allen übrigen Brüchen. Die oben gegebenen Brüche heißen daher mit gemeinschaftlichen Nenner so:

$$\frac{adpy+bcpy+bdmy+bdpx.}{bdpy}$$

Um also Brüche auf gleiche Nenner zu bringen, sucht man den gemeinschaftlichen Nenner, dividirt mit dem Nenner jedes einzelnen Bruches in den gemeinschaftlichen Nenner, und multiplizirt den erhaltenen Quotienten mit dem Zähler des Bruches; dieses Produkt ist dann der entsprechende Zähler des zu erhaltenden Bruches, der als Nenner den gemeinschaftlichen Nenner hat.

Bei der Herstellung des gemeinschaftlichen Nenners findet eine Abkürzung in dem Falle statt, wenn zwei oder mehr Nenner einen gleichen Faktor haben. Indem man nemlich jene Faktoren eines Nenners, die in einem andern Nenner enthalten sind, außer Acht läßt, erhält man einen kleinsten gemeinschaftlichen Nenner; diesen kleinsten Nenner erkennt man daran, daß die Quotienten, die man erhält, wenn man mit jedem einzelnen Nenner in den gemeinschaftlichen Nenner dividirt, keinen gemeinschaftlichen Faktor haben. Man habe z. B.

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{ax} - \frac{m}{by} + \frac{p}{xy}$$

auf gemeinschaftlichen Nenner zu bringen.

Der allgemeine Nenner ist hier abxy; man erhält demnach;

$$\frac{aaxy + bcy - amx + abp}{abxy}$$

Zus. Jede Zahl kann auf die Form eines Bruches mit beliebigem Nenner gebracht werden. (Vergl. 30).

§. 33. Wenn Zähler und Nenner eines Bruches einen gleichen Faktor haben, so kann man nach [43] mit diesem Faktor in Zähler und Nenner dividiren, ohne daß der Bruch geändert wird. Dadurch kann man häufig die Brüche auf einfachere Ausdrücke zurückführen. Auf den einfachsten Ausdruck aber ist ein Bruch zurückgeführt, wenn Zähler und Nenner keinen gemeinschaftlichen Faktor haben.

§. 34. Um nach §. 33 einen Bruch auf den einfachsten Ausdruck zurückführen zu können, müssen wir Zähler und Nenner (wenn sie Produkte sind) in ihre Faktoren zerlegen. Wie man aus einem Produkte, wenn der eine Faktor gegeben ist, den andern Faktor finden könne, wurde bei der Division gezeigt. Nun aber sollen die Faktoren eines Produktes gefunden werden, ohne daß ein Faktor gegeben ist.

Bei dieser Zerlegung der Produkte in ihre Faktoren betrachten wir nur die einfachsten Fälle unter folgenden vier Bedingungen.

1. Enthält in einem Produkte jedes Glied denselben Faktor,

so erhält man den andern Faktor, wenn man mit dem leicht kennbaren Faktor in das ganze Produkt dividirt. Man hat also:

$ab+ax=a(b+x)$

$bm-bx+b=b(m-x+1)$

$12abx-9abc+15bcm=3b(4ax-3ac+5cm)$.

2. Multiplizirt man die Summe zweier Zahlen mit ihrer Differenz, so erhält man eine Differenz, in welcher sowohl Minuend als Subtrahend ein Produkt von zwei gleichen Faktoren ist; es sind nemlich:

$$(a+b)(a-b)=aa-bb.$$

Ist also umgekehrt eine Differenz von dieser Form gegeben, so läßt sie sich in zwei Faktoren auflösen, von denen der eine die Summe, der andere die Differenz der nemlichen Zahlen ist; man hat also:

$xx-yy=(x+y)(x-y)$

$9aa-4xx=(3a+2x)(3a-2x)$

$aaaa-bbbb=(aa+bb)(aa-bb)=(aa+bb)(a+b)(a-b)$

$12aax-27xxx=3x(4aa-9xx)=3x(2a+3x)(2a-3x)$

3. Besteht ein Produkt aus vier Gliedern, von welchen je zwei einen gemeinschaftlichen Faktor haben, so läßt sich das Produkt häufig in zwei Faktoren zerlegen, wenn man das Verfahren unter 1. zweimal anwendet. Man hat daher:

$ac+bc-ad-bd=c(a+b)-d(a+b)=(a+b)(c-d)$

$6ax-10bx+21ay-35by=2x(3a-5b)+7y(3a-5b)$
$=(3a-5b)(2x+7y)$.

4. Besteht ein Produkt aus drei Gliedern, so kann dieses Produkt aus zwei Faktoren von je zwei Gliedern entstanden seyn, in welchem aber durch Abkürzung zwei Glieder in eines zusammengezogen wurden. In diesem Falle findet man die Faktoren nur durch Versuch, hat aber bei diesem Versuche doch einige Anhaltspunkte; nemlich: das erste Glied des Produktes ist ein Produkt aus den ersten Gliedern der Faktoren; eben so das letzte Glied ein Produkt aus den zweiten Gliedern der Faktoren. Man habe das Produkt:

$$15aa-11ab-14bb.$$

Die zu erhaltenden Faktoren können beziehungsweise als erstes Glied haben:

3a und 5a

15a und a

Eben so können die zweiten Glieder der Faktoren beziehungsweise seyn:

7b und 2b

14b und b u. s. f.

Aus den Zeichen des zweiten und dritten Gliedes sieht man überdieß, daß der eine Faktor eine Summe, der andere Faktor eine Differenz ist. Wir versuchen also:

α) $(3a+7b)(5a-2b)=15aa+29ab-14bb$

β) $(3a-2b)(5a+7b)=15aa+11ab-14bb$

γ) $(3a+2b)(5a-7b)=15aa-11ab-14bb$

Da nun das unter γ) gefundene Produkt mit dem gegebenen identisch ist, so sind also die Faktoren: $(3a+2b)$ und $(5a-7b)$.

Durch Uebung erlangt man bei dieser Zerfällung bald Fertigkeit.

Zus. Wendet man das hier angedeutete Verfahren auf Brüche an, so hat man z. B.

$$\frac{ax-bx}{ac-bc}=\frac{x(a-b)}{c(a-b)}=\frac{x}{c}$$

$$\frac{aa-xx}{ab+bx+ac+cx}=\frac{(a+x)(a-x)}{(a+x)(b+c)}=\frac{a-x}{b+c}$$

$$\frac{10aa+7ab-12bb}{20aa-31ab+12bb}=\frac{(2a+3b)(5a-4b)}{(5a-4b)(4a-3b)}=\frac{2a+3b}{4a-3b}$$

§. 35. Die in §§. 4, 7, 17, 24 aufgestellten Grundsätze daß, im Allgemeinen, Gleiches gleich verändert Gleiches gibt, führen uns nothwendig auf die Untersuchung der Resultate, die wir erhalten, wenn wir Gleiches ungleich, oder Ungleiches gleich verändern Zu diesem Zwecke wollen wir zwei Ausdrücke, von denen wir nicht wissen, ob sie gleich oder ungleich sind, unentschieden heißen, und bezeichnen dieß durch ($\mathbf{Z}$); z. B. a $\mathbf{Z}$ b; d. h. a kann gleich b seyn, oder größer, oder kleiner.

Hat man die Differenz $a-b$, so ist sie positiv, Null, oder negativ, je nachdem a größer, gleich oder kleiner als b ist. Um also umgekehrt zu untersuchen, ob zwei Zahlenausdrücke gleich oder ungleich, und im letztern Falle, welcher von beiden größer sey, nimmt man ihre Differenz und untersucht, ob diese Null positiv oder negativ sey.

Aus diesen Betrachtungen ergeben sich nun folgende Sätze:

1. Ist $a>b$; d. h. $(a-b)=d$ (d eine positive Zahl), so ist $(a+m)-(b+m)=d$; eben so

$(a-m)-(b-m)=d$;

mithin $a+m>b+m$;

d. h. Gleiches zu Größerm addirt, gibt eine größere Summe, als Gleiches zu Kleinerm addirt; und

$a-m>b-m$;

d. h. bei gleichem Subtrahend ist die größere Differenz auf Seite des größern Minuends.

Zus. Ist $a>b$; $c>d$; so ist

$a+c>b+d$; dagegen $a+d \; \mathbf{Z} \; b+c$.

2. Ist $a>b$, $(a-b=d)$, so ist:

$c \quad a<c-b$;

d. h. bei gleichem Minuend ist die größere Differenz auf Seite des kleinern Subtrahends, und umgekehrt; denn nach unserer Voraussetzung ist: $a-b=d$; addiren wir auf der linken Seite $(c-c)$, so hat man

$(a-b)+(c-c)=d$ oder

$(c-b)-(c-a)=d$; daher

$c-b>c-a$.

Anmerk. Um zu zeigen, daß $(a-b)+(c-c)=(c-b)-(c-a)$ sey, addire man $(c-a)$.

Zus. Ist $a>b$; $c>m$, so hat man:

$a-m>b-c$; dagegen $a-c \; \mathbf{Z} \; b-m$.

3. Ist $a>b$ $(a-b=d)$, so ist

$ac>bc$ (wenn c eine positive Zahl ist); denn

$a-b=d$; daher

$c(a-b)=cd$ oder $ac-bc=cd$; nun ist cd eine positive Zahl; also auch $ac-bc$; mithin $ac>bc$.

Größeres mit Gleichem multiplizirt gibt ein größeres Produkt, als Kleineres mit Gleichem.

Zus. 1. Es ist aber $-ac<-bc$. Es darf hier nur gezeigt werden, daß $(-bc)-(-ac)$ eine positive Zahl ist; es ist aber: $(-bc)-(-ac)=(-bc)+ac=ac-bc$; nun ist $ac-bc=cd$ (eine positive Zahl); daher auch

$$(-bc)-(-ac)=cd; \text{ also } -bc>-ac.$$

Zus. 2. Ist $a>b$; $c>m$; so ist $ac>bm$; dagegen $am \gtrless bc$.

4. Hat man: $a>b(a-b=d)$, so ist $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$;
d. h. bei gleichem Divisor fällt der größere Quotient auf Seite des größern Dividends; denn

$a-b=d$; also $\frac{a-b}{c}=\frac{d}{c}$ oder $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}=\frac{d}{c}$; nun ist $\frac{d}{c}$ positiv; also auch $\frac{a}{c}-\frac{b}{c}$; mithin $\frac{a}{c}>\frac{b}{c}$.

5. Ist $a>b(a-b=d)$; so ist: $\frac{c}{a}<\frac{c}{b}$,
d. h. bei gleichem Dividend fällt der größere Quotient auf Seite des kleinern Divisors, und umgekehrt.

Zu zeigen ist, daß $\frac{c}{b}-\frac{c}{a}$ positiv ist.

Es ist aber $a-b=d$, also auch

$ac-bc=cd$, mithin auch

$$\frac{(ac-bc)}{ab}=\frac{cd}{ab} \text{ oder}$$

$$\frac{ac}{ab}-\frac{bc}{ab}=\frac{cd}{ab}; \text{ d. i.}$$

$$\frac{c}{b}-\frac{c}{a}=\frac{cd}{ab}; \text{ nun ist}$$

$\frac{cd}{ab}$ positiv; also auch $\frac{c}{b}-\frac{c}{a}$ positiv; daher $\frac{c}{b}>\frac{c}{a}$.

Zus. Ist a>b; c>m; so ist $\frac{a}{m} > \frac{b}{c}$; dagegen: $\frac{a}{c} \lessgtr \frac{b}{m}$.

Dritter Abschnitt.

Potenziren, Radiziren, Logarithmiren.

§. 36. Erklärung. Eine Zahl so oft als Faktor setzen, als eine andere gegebene Zahl Einheiten hat, heißt potenziren. Die erste gegebene Zahl heißt Dignand; die zweite Exponent; und die dadurch erhaltene Zahl (oder das Zeichen für sie) heißt Potenz. Der allgemeine Ausdruck einer Potenz ist: a^m; a ist Dignand, m Exponent; Dignand mit dem Exponenten potenzirt, gibt die Potenz.

Zus. Eine Potenz, deren Dignand die Einheit ist, ist wieder 1; d. i. $1^m = 1$.

Anmerk. 1. Die Potenz einer Zahl ist wieder eine Zahl.

Anmerk. 2. Die zweite Potenz (Produkt aus zwei gleichen Faktoren) heißt gewöhnlich Quadrat; die dritte Potenz Kubus; die vierte Biquadrat.

§. 37. Lehrsätze. Aus dem Begriffe der Potenz werden, mit Rücksicht auf die früher aufgestellten Sätze folgende Lehrsätze erwiesen.

1. Ein Produkt wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man jeden Faktor mit der Zahl potenzirt, und die so erhaltenen Potenzen miteinander multiplizirt; d. i.

$$(a \cdot b)^m = (a^m) \cdot (b^m) \quad [47]$$

denn man hat:

$(a \cdot b)^m = (ab) \cdot (ab) \cdot (ab) \ldots\ldots\ldots$ m mal $=$

$(a \cdot a \cdot a \ldots$ m mal$)$ $(b \cdot b \cdot b \ldots$ m mal$)$ $=$

$(a^m) \cdot (b^m)$.

Umgekehrt: man erhält das Produkt zweier Potenzen mit gleichen Exponenten, wenn man das

Produkt der Dignanden mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

2. Ein Quotient wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man sowohl Dividend als Divisor mit der Zahl potenzirt, und die erste Potenz durch die zweite dividirt, d. i.

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \quad [48]$$

denn es ist:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{a}{b}\right) \ldots\ldots \text{ m mal} =$$

$$\frac{a\,.\,a\,.\,a \ldots\ldots \text{m mal}}{b\,.\,b\,.\,b \ldots\ldots \text{m mal}} = \frac{a^m}{b^m}.$$

Umgekehrt: Zwei Potenzen mit gleichen Exponenten werden durcheinander dividirt, wenn man den Dignand des Dividends durch den Dignand des Divisors dividirt, und den erhaltenen Quotienten mit dem gemeinschaftlichen Exponenten potenzirt.

3. Zwei Potenzen mit gleichen Dignanden werden multiplizirt, wenn man den gemeinschaftlichen Dignand mit der Summe der Exponenten potenzirt, d. i.

$$a^m\,.\,a^p = a^{(m+p)} \quad [49]$$

denn man hat:

$a^m\,.\,a^p = (a\,.\,a\,.\,a \ldots\ldots \text{m mal})\,(a\,.\,a\,.\,a \ldots\ldots \text{p mal}).$

Die Zahl a soll also so oft als Faktor stehen, als m und p Einheiten haben, d. i. $(m+p)$ mal; also:

$a^m\,.\,a^p = (a\,.\,a\,.\,a \ldots.)\,(m+p)\text{mal} = a^{(m+p)}.$

Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einer Summe potenzirt wenn man die Zahl mit jedem Summanden potenzirt, und die erhaltenen Potenzen miteinander multiplizirt.

Zus. Soll die Potenz a^m mit a multiplizirt werden, so soll a m mal und noch einmal als Faktor stehen; man hat also: $(a^m)\,.\,a = a^{m+1}$; umgekehrt: $a^{m+1} = a^m\,.\,a^1$; es ist also

$a = a^1$; d. h. jede Zahl kann als Potenz mit dem Exponenten 1 betrachtet werden.

4. Zwei Potenzen mit gleichem Dignand werden dividirt, wenn man den gemeinschaftlichen Dignand mit der Differenz der beiden Exponenten potenzirt; (vom Exponent des Dividends den Exponent des Divisors subtrahirt); d. i.

$$\frac{a^m}{a^p} = a^{(m-p)} \quad [50]$$

Zum Beweise multiplizire man beiderseits mit (a^p), so hat man:

$\left(\frac{a^m}{a^p}\right)(a^p) = a^m$.

$a^{(m-p)} . (a^p) = a^{(m-p)+p} = a^m$; daher auch

$\left(\frac{a^m}{a^p}\right)(a^p) = (a^{(m-p)}(a^p)$; und hieraus ergibt sich die obige Gleichung.

Umgekehrt: Eine Zahl wird mit einer Differenz potenzirt wenn man die Zahl sowohl mit dem Minuend als Subtrahend potenzirt, und die erste Potenz durch die zweite dividirt.

Zus. 1. Eine Potenz, deren Exponent Null ist, ist der Einheit gleich; d. i. $a^o = 1$; denn

$a^o = a^{(m-m)} = \frac{a^m}{a^m} = 1$.

Zus. 2. Eine Zahl wird mit einem negativen Ausdrucke potenzirt, wenn man die Zahl mit dem Gliede des negativen Ausdruckes potenzirt und mit dieser Potenz in 1 dividirt; d. i.

$a^{-m} = \frac{1}{a^m}$; denn $a^{-m} = a^{o-m} = \frac{a^o}{a^m} = \frac{1}{a^m}$.

Auf dieselbe Weise hat man auch: $\frac{1}{a^{-m}} = 1 . a^m = a^m$. Daraus folgt: In einem Quotienten kann man jeden Faktor des Dividends als Faktor des Divisors, und umgekehrt, setzen, wenn

man den Exponenten des Faktors mit entgegengesetzten Zeichen nimmt.

Anmerk. Obiges Gesetz kann auch so ausgedrückt werden: Eine Zahl wird mit einem negativen Ausdruck potenzirt, wenn man die reciproke Zahl mit dem Gliede des negativen Ausdrucks potenzirt; also:

$$a^{-m} = \left(\frac{1}{a}\right)^m = \frac{1}{a^m}.$$

5. Eine Potenz wird mit einer Zahl potenzirt, wenn man den Dignand mit dem Produkte des Exponenten in die Zahl potenzirt; d. i.

$$(a^m)^p = a^{mp} \quad [51]$$

denn man hat: $(a^m)^p = a^m . a^m\, a^m \ldots\ldots \text{pmal}) =$

$$a^{(m + m + m + \cdots\cdots \text{pmal})} = a^{mp}.$$

Umgekehrt: man erhält eine Potenz deren Exponent ein Produkt ist, wenn man den Dignand mit dem einen Faktor potenzirt, und die so erhaltene Potenz mit dem andern Faktor potenzirt.

Anmerk. Man verwechsle die wesentlich verschiedenen Ausdrücke nicht: $(a^m)^p$ und $a^{(m^p)}$.

§. 38. Grds. Hat man: $a = b$, so ist auch:

$$a^m = b^m \quad [52]$$

d. h. gleiche Zahlen mit gleichen Exponenten potenzirt, gibt gleiche Potenzen; und umgekehrt.

Anhang zum Potenziren.

Das Zahlensystem.

§. 39. Auf den Gesetzen der Potenzen beruht die Bezeichnung aller möglichen Zahlen durch einige wenige Zahlzeichen, so wie das Rechnen mit Zahlen überhaupt.

Nehmen wir an, β sei eine beliebige bestimmte Zahl, und jede ganze Zahl, kleiner als β, werde ausgedrückt durch a, b, c, d .....; so kann jede mögliche Zahl als eine Summe, deren Summanden Produkte aus einer Zahl a, b ..... mit Potenzen der Zahl β sind, dargestellt werden; der allgemeine Ausdruck einer (ganzen) Zahl ist also;

$$a\beta^0 + b\beta^1 + c\beta^2 + d\beta^3 + e\beta^4 \ldots\ldots (1$$

Die Zahl β heißt nun Basis des Zahlensystems, und ist der Theorie nach willkührlich; nur soll sie weder zu groß noch zu klein, und durch kleinere Zahlen theilbar seyn; da aber alle Völker in ihrer Sprache einfache Bezeichnungen nur für die Potenzen der Zahl zehn haben, so sind auch alle Völker an das Rechnen in jenem System gebunden, dessen Basis (β) zehn ist (Dezimalsystem, Dekadik). In diesem System hat man also für die neun ganzen Zahlen, die kleiner als zehn sind, eigene Zeichen: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und überdieß noch ein Zeichen 0 (Null), um den Mangel einer Zahl anzudeuten. Die zehn Zeichen heißen (arabische) Ziffern.

§. 40. Um jede Zahl in der größten Einfachheit darzustellen, läßt man das Zeichen der Summe, welches im allgemeinen Zahlenausdrucke (1 vorkommt, weg, und bezeichnet überdieß (von der rechten Hand gegen die linke, als von den niedern zu den höhern Zahlen fortgehend) die Potenzen der Basis bloß durch die Stellen, an welchen die Coeffizienten dieser Potenzen stehen.

Die Ziffern nemlich, die an der ersten, (niedersten), zweiten, dritten, vierten rc. Stelle stehen, haben als Faktoren beziehungsweise die Potenzen: 10^0, 10^1, 10^2, 10^3 und heißen: Einer, Zehner, Hunderter rc...... Man schreibt also kurz: 98753, statt zu schreiben: $3.10^0 + 5.10^1 + 7.10^2 + 8.10^3 + 9.10^4$. Eben so hat man: $8002 = 2.10^0 + 0.10^1 + 0.10^2 + 8.10^3$.

Eine Ziffer also, die auf der nten Stelle steht, hat als Faktor 10^{n-1}; und umgekehrt: eine Zahl, deren höchste Ziffer als Faktor 10^n hat, wird mit $(n+1)$ Ziffern geschrieben.

§. 41. So wie wir durch die Reihe (1 jede ganze Zahl darzustellen vermögen, eben so können wir jeden Bruch darstellen durch die Reihe:

$$a\beta^{-1} + b\beta^{-2} + c\beta^{-3} + d\beta^{-4} \ldots\ldots (2$$

welche Reihe nach (§. 37. 4. Zus. 2.) auch so dargestellt werden kann:

$$\frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^2} + \frac{c}{\beta^3} + \frac{d}{\beta^4} \ldots\ldots$$

Wie bei ganzen Zahlen, läßt sich auch bei Brüchen in dem Anschreiben eine Abkürzung anbringen, indem man die Potenzen 10^{-1}, 10^{-2} rc. ..... durch die Stellen andeutet, an welchen die Coeffizienten der Potenzen stehen.

Die Zahl:

$$3 . 10^2 + 7 . 10^1 + 5 . 10^0 + 4 . 10^{-1} + 8 . 10^{-2} + 1 . 10^{-3}$$

schreibt man kurz: 375, 481, und heißt das Zeichen, welches die links stehenden Ganzen von den rechts stehenden Brüchen trennt, Dezimalzeichen (Dezimalstrich); dagegen heißt man die Brüche Zehntel, Hundertel rc. ....

Jede Ziffer also, die nach dem Dezimalstrich, (von der linken gegen rechts fortschreitend) auf der ersten, zweiten, dritten... Stelle steht, hat beziehungsweise die Faktoren 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}...

Die nte Stelle hat mithin als Faktor 10^{-n}.

Zus. 1. Ist ein Dezimalbruch ohne Ganze gegeben, so wird der Mangel des Ganzen durch Null ausgedrückt; z. B. $3 . 10^{-1} + 0 . 10^{-2} + 8 . 10^{-3} = 0{,}308$.

Zus. 2. Es ist: $a\beta^{-1} + b\beta^{-2} + c\beta^{-3} = \frac{a}{\beta} + \frac{b}{\beta^2} + \frac{c}{\beta^3}$

$$= \frac{a\beta^2 + b\beta + c}{\beta^3};$$

d. h.: Man kann die nach dem Dezimalstrich stehenden Ziffern als eine Zahl, aber als Zähler eines Bruches betrachten, der als Nenner 10 in der sovielten Potenz hat, als der Zähler Zifferstellen enthält; hat also der Zähler n Zifferstellen, so heißt der Nenner 10^n; 10^n hat aber $(n + 1)$ Zifferstellen, und zwar

n Nullen, und an der höchsten Stelle die Einheit; daher sagt man auch: Dezimalbruch sey jener Bruch, der als Nenner 1 und so viel Nullen hat, als der Zähler Zifferstellen enthält.

Zus. 3. Durch Nullen, die man einem Dezimalbruche anhängt, wird der Werth desselben nicht geändert.

§. 42. Der Werth der höchsten Ziffer einer (nach §. 40. dargestellten) Zahl ist größer, als alle nachfolgenden zusammengenommen, selbst für den Fall, daß die höchste Ziffer 1 ist (die kleinste unter den bedeutlichen); alle nachfolgenden aber den möglich größten Werth ($\beta - 1$) haben; d. h. hat man allgemein:

$\beta^n + a\beta^{n-1} + a\beta^{n-2} + \ldots\ a\beta^2 + a\beta + a$; so ist:

$\beta^n > (a\beta^{n-1} + a\beta^{n-2} + \ldots\ a\beta^2 + a\beta + a)$

Nehmen wir für a den höchsten Werth, also $a = \beta - 1$, so hat man:

$a\beta^{n-1} = (\beta - 1)\ \beta^{n-1} = \beta^n - \beta^{n-1}$;

$a\beta^{n-2} = (\beta - 1)\ \beta^{n-2} = \beta^{n-1} - \beta^{n-2}$ ꝛc. ..

$a\beta^2 = \beta^3 - \beta^2$

$a\beta = \beta^2 - \beta$

$a\beta^0 = \beta - 1$.

Es ist also:

$a\beta^{n-1} + a\beta^{n-2} + \ldots a\beta^2 + a\beta + a\beta^0 = \beta^n - \beta^{n-1} + \beta^{n-1} - \beta^{n-2} + \beta^{n-2} - \beta^{n-3} + \ldots \beta^3 - \beta^2 + \beta^2 - \beta + \beta - 1 = \beta^n - 1$.

Nun ist $\beta^n - (\beta^n - 1) = 1$ (§. 35.)

also: $\beta^n > (\beta^n - 1)$ oder

$\beta^n > a\beta^{n-1} + a\beta^{n-2} + \ldots\ldots a\beta + a^0$.

Zus. In der Reihe:

$\beta^{-1} + a\beta^{-2} + a\beta^{-3} + a\beta^{-4} \ldots\ldots$

ist, wenn die Reihe einmal abbricht:

$\beta^{-1} > a\beta^{-2} + a\beta^{-3} + a\beta^{-4} \ldots\ldots$

Geht aber die Reihe unendlich fort, so ist: ($a = \beta - 1$)

$\beta^{-1} = a\beta^{-2} + a\beta^{-3} + a\beta^{-4} + \ldots\ldots$

§. 43. Hat man zwei oder mehrere Zahlen zu addiren, z. B.

$(a\beta^0 + b\beta^1 + c\beta^2 + d\beta^3 + \ldots) + (c\beta^0 + d\beta^1 + e\beta^2 + f\beta^3)$, so erhält man nach (17):

$(a+c)\beta^0 + (b+d)\beta^1 + (c+e)\beta^2 + (d+f)\beta^3 \ldots$ (3

Nun ist jede der Zahlen a, b, c.... kleiner als β; aber die Summe von zwei oder mehreren solchen Zahlen kann größer seyn als β; es sey nun $a + c > \beta$; etwa $a + c = \beta + g$; so ist $(a+c)\beta^0 = (\beta + g)\beta^0 = \beta + g\beta^0$; daher erhält man statt der Zahl (3:

$g\beta^0 + (b + d + 1)\beta^1 + (c + e)\beta^2 + (d + f)\beta^3 \ldots$ (4

Ist $(b + d + 1) = \beta + h$, so erhält man auf ähnliche Weise aus (4: $g\beta^0 + h\beta^1 + (c + e + 1)\beta^2 + (d + f)\beta^3 \ldots$ u. s. f.

Daraus ergeben sich nun für das Addiren ganzer Zahlen die Regeln:

1. Es können nur gleichnamige Zahlen addirt werden (die auf derselben Stelle stehen).

2. Ist die Summe der Zahlen an der ersten, zweiten, dritten ꝛc..... Stelle beziehungsweise gleich, oder größer, als 10, 10^2, 10^3.... oder auch ein mehrfaches dieser Potenzen, so werden die ein- oder mehrfachen Potenzen der Basis zur nächst höhern Stelle gezählt; nur der Rest, kleiner als die Basis, bleibt auf der entsprechenden Stelle.

Aus diesem Grunde beginnt man das Addiren von den niedern Stellen, und schreitet nach der Reihe zu den höhern vor.

Zus. Für Dezimalbrüche gelten dieselben Regeln, wie sich auch allgemein leicht nachweisen läßt.

§. 44. Hat man zwei Zahlen zu subtrahiren, oder ist allgemein gegeben:

$(a\beta^0 + b\beta^1 + c\beta^2 + d\beta^3 + \ldots) - (c\beta^0 + d\beta^1 + e\beta^2 + f\beta^3 \ldots)$

so hat man nach (18):

$(a-c)\beta^0 + (b-d)\beta^1 + (c-e)\beta^2 + (d-f)\beta^3 \ldots$ (5

Sind nun a, b, c, d beziehungsweise größer, als c, d, e f, so sind sämmtliche Differenzen gerade; daher läßt sich die Subtraktion bei bestimmten Zahlen leicht vornehmen.

Wäre aber $a < c$, so setze man:
$(b-d)\beta^1 = (b-d)\beta + \beta - \beta = (b-d-1)\beta + \beta$; die Reihe (5 geht nun in diese über:
$(a-c+\beta)\beta^0 + (b-d-1)\beta + (c-e)\beta^2 + (d-f)\beta^3 \ldots$

Nun ist offenbar $\beta + a > c$; daher die Differenz $(\beta + a) - c$ gerade; und so verfährt man bei allen folgenden Gliedern, so oft man auf eine verkehrte Differenz stößt. Daraus ergeben sich folgende Regeln:

1. Man zieht die gleichnamigen Zahlen ab.

2. Ist aber eine Zahl im Minuend kleiner, als die entsprechende im Subtrahend, so entlehnt man von der nächst höhern Stelle des Minuends eine Einheit u. s. f.

Zus. Für Dezimalbrüche gilt dasselbe.

§. 45. Hat man zwei Zahlen zu multipliziren, d. i. $(a\beta^0 + b\beta + c\beta^2 + d\beta^3 \ldots)(e\beta^0 + f\beta + g\beta^2 + h\beta^3 \ldots)$, so erhält man nach §. 21.

$$\begin{array}{l} ae\beta^0 + af\beta + ag\beta^2 + ah\beta^3 \ldots \\ \quad be\beta + bf\beta^2 + bg\beta^3 + bh\beta^4 \ldots \\ \qquad ce\beta^2 + cf\beta^3 + cg\beta^4 + ch\beta^5 \ldots \\ \qquad\quad de\beta^3 + df\beta^4 + dg\beta^5 + dh\beta^6 \ldots \\ \hline ae\beta^0 + \beta(af + be) + \beta^2(ag + bf + ce) + \beta^3(ah + bg + cf + de) + \ldots \end{array}$$

Ist nun ae, oder af+be u. s. f. größer als die Basis, so wird eine ähnliche Abkürzung genommen, wie bei der Addition. Man beginnt daher auch bei der Multiplication ganzer Zahlen von den niedern Stellen, wobei man den angedeuteten allenfallsigen Ueberschuß gleich zur nächst höhern Stelle zählen kann.

Um allgemein zu bestimmen, zwischen welchen Grenzen das Produkt zweier ganzer Zahlen liege, habe man:

$$a\beta^n \times b\beta^m = ab\beta^{m+n}.$$

Die Zahlen $a\beta^n$, $b\beta^m$ haben beziehungsweise $(n+1)$, $(m+1)$, also zusammen: $(m+1)+(n+1)$ Zifferstellen; das Produkt $ab\beta^{m+n}$ enthält wenigstens $(m+n+1)$ Zifferstellen; da aber $ab = c\beta + d$ seyn kann, so wird dann: $ab\beta^{m+n} = (c\beta + d)\beta^{m+n}$

$= c\beta^{m+n+1} + d\beta^{m+n}$. Diese Zahl hat aber $(m+n+1)+1 = (n+1)+(m+1)$ Zifferstellen; daher das Gesetz:

Das Produkt zweier Zahlen enthält entweder so viele Zifferstellen, als die Faktoren zusammen Zifferstellen haben, oder eine Zifferstelle weniger.

Zus. 1. Es ist: $a\beta^{-m} \times b\beta^{-n} = ab\beta^{-(m+n)}$; d. h. man multiplizirt Dezimalbrüche wie ganze Zahlen; das Produkt enthält aber so viele Dezimalstellen, als die Faktoren zusammen Dezimalstellen haben.

Zus. 2. Will man das Produkt zweier Dezimalbrüche blos näherungsweise erhalten, so bedient man sich der abgekürzten Multiplikation. Soll das Produkt: $7{,}3576294 \times 3{,}2987563$ bis auf 6 Dezimalstellen richtig angegeben werden, so hat die abgekürzte Rechnung folgende Form:

$$\begin{array}{r} 7{,}3576294 \\ 3{,}2987563 \\ \hline 22{,}0728882 \\ 1{,}4715258 \\ 6621866 \\ 588609 \\ 51503 \\ 3678 \\ 441 \\ 21 \\ \hline 24{,}2710258 \end{array}$$

§. 46. Soll die Zahl:

$$a\beta^{n} + b\beta^{n-1} + c\beta^{n-2} + \ldots\ldots m\beta + p\beta^{0}$$

dividirt werden durch die Zahl:

$$d\beta^{m} + e\beta^{m-1} + f\beta^{m-2} + \ldots\ldots g\beta + h\beta^{0}$$

so erhält man nach (§. 30) als ersten Partialquotienten: $\frac{a}{d}\beta^{n-m}$.

Multiplizirt man diesen Quotienten mit dem Divisor, und zieht das Produkt vom Dividend ab, so erhält man den Rest als neuen Dividend u. s. f.

Um die Grenzen zu bestimmen, zwischen welchen der Quotient liegt, muß man wissen ob a $\gtrless$ d sey. Ist a $>$ d, so enthält der Quotient $(n-m)+1$ Zifferstellen; ist a $<$ d, so enthält der Quotient nur $n-m$ Zifferstellen; ist a $=$ d, so wird untersucht ob b $\geqq$ c u. s. f. sey.

Zus. 1. Bei der Division von Dezimalbrüchen hat man allgemein: $a\beta^{-m} : b\beta^{-n} = \frac{a}{b}\beta^{n-m}$.

Ist nun $n=m$, so ist $\frac{a}{b}\beta^{n-m} = \frac{a}{b}$;

d. h. haben Dividend und Divisor gleich viele Dezimalstellen, so dividirt man wie mit Ganzen, und der Quotient ergiebt sich, als hätte man ursprünglich nur ganze Zahlen zu dividiren gehabt. Da aber Dezimalbrüche nicht geändert werden, wenn man denselben am Ende Nullen anhängt, so kann jede Division von Dezimalbrüchen dadurch auf diesen Fall zurückgeführt werden, daß man durch Anhängung von Nullen im Dividend und Divisor die Anzahl der Dezimalstellen gleich macht.

Zus. 2. Bei der Division der Dezimalbrüche kann bisweilen eine ähnliche Abkürzung statt haben, wie bei der Multiplikation.

§. 47. Erklärungen. Primzahlen (absolute) heißen jene Zahlen, die nur durch 1 und sich selbst ohne Rest theilbar sind. Theilbar heißt eine Zahl (oder zusammengesetzt), wenn sie durch irgend eine andere Zahl ohne Rest theilbar ist.

Sind zwei oder mehrere Zahlen so beschaffen, daß sie (ohne eben absolute Primzahlen zu seyn) keinen gemeinschaftlichen Theiler haben, so heißen sie relative Primzahlen; (Primzahlen unter sich).

Jede Zahl, die nicht Primzahl ist, läßt sich als ein Produkt darstellen, dessen Faktoren (absolute) Primzahlen sind.

§. 48. Um zu untersuchen, in welchen Fällen eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 und 11 ohne Rest theilbar sey, dividiren wir durch diese Zahlen den allgemeinen Ausdruck der Zahl:

$$a + 10b + 10^2c + 10^3d + 10^4e \ldots.$$

so erhält man folgenden Rest:

Divisor.	Rest.
2	a
3	$a + b + c + d + e \ldots.$
4	$a + 2b$
5	a
6	$a + 4b + 4c + 4d + 4e \ldots.$
7	$a + 3b + 2c + 6d + 4e \ldots.$
8	$a + 2b + 4c$
9	$a + b + c + d + e \ldots.$
11	$a + 10b + c + 10d + e + 10f \ldots.$

$$= (a - b + c - d + e - f) + 11b + 11d + 11f \ldots.)$$
$$= (a + c + e) - (b + d + f) + 11(b + d + f \ldots.)$$

Daraus ergeben sich nun folgende Regeln:

1. Durch 2 oder 5 ist eine Zahl theilbar, wenn deren letzte Ziffer beziehungsweise durch 2 oder 5 theilbar ist.

Eine durch 2 theilbare Zahl heißt gerade Zahl; allgemein: $2m$; $2m + 1$ ist der Ausdruck für jede ungerade (durch 2 nicht theilbare) Zahl.

2. Durch 3 oder 9 ist eine Zahl theilbar, wenn die Ziffersumme beziehungsweise durch 3 oder 9 theilbar ist.

3. Durch 4 ist eine Zahl theilbar, wenn die Summe der letzten und der doppelten vorletzten Ziffer durch 4 theilbar ist, (oder wenn die durch die zwei letzten Ziffern ausgedrückte Zahl durch 4 theilbar ist).

4. Durch 8 ist eine Zahl theilbar, wenn die Summe der letzten, der doppelten vorletzten, und der vierfachen drittletzten durch 8 theilbar ist (oder wenn die durch die drei letzten Ziffern ausgedrückte Zahl durch 8 theilbar ist).

5. Durch 11 ist eine Zahl theilbar, wenn die Differenz zwischen der Summe der Ziffern an geraden und ungeraden Stellen durch 11 theilbar ist.

Für die Division mit 6 oder 7 läßt sich ein einfaches Gesetz nicht angeben.

Zus. 1. Ist eine Zahl theilbar durch zwei oder mehrere Zahlen, die unter sich Primzahlen sind, so ist sie auch durch das Produkt dieser Zahlen theilbar.

Zus. 2. Nach den über die Theilbarkeit aufgestellten Regeln lassen sich zusammengesetzte Zahlen in ihre Primzahlen auflösen, und dadurch kann für mehrere Zahlen der kleinste gemeinschaftliche Dividend gefunden werden (vergl. §. 32); eben so auch der kleinste gemeinschaftliche Divisor.

§. 49. Kann der gemeinschaftliche Theiler von zwei (oder mehreren) Zahlen nach §. 48, Zus. 2 nicht gefunden werden, so dividirt man mit der kleinern Zahl in die größere; bleibt kein Rest, so ist die kleinere selbst der gesuchte Theiler; bleibt ein Rest, so dividirt man mit diesem in den vorigen Divisor; und so dividirt man immer mit dem Reste in den vorigen Divisor, bis sich die Rechnung hebt; jener Divisor, bei dem sich die Rechnung hebt, ist der gemeinschaftliche Theiler. Bleibt aber zuletzt der Rest 1, so haben die Zahlen außer 1 keinen gemeinschaftlichen Theiler; d. h. sie sind relative Primzahlen.

Es seyen **A**, **B** zwei Zahlen, für welche der gemeinschaftliche Theiler gesucht werden soll; sey $A > B$; bezeichnen wir die Quotienten mit Q, Q_1, Q_2, Q_3 ... und die entsprechenden Reste mit R, R_1, R_2, R_3; so hat man:

1. $\frac{A}{B} = Q + \frac{R}{B}$;

2. $\frac{B}{R} = Q_1 + \frac{R_1}{R}$;

3. $\frac{R}{R_1} = Q_2 + \frac{R_2}{R_1}$;

4. $\frac{R_1}{R_2} = Q_3 + \frac{R_3}{R_2}$;

5. $\frac{R_2}{R_3} = Q_4$.

Es ist R_3 in R_2 und in R_3 enthalten; also auch (da nach 4: $R_1 = R_2 Q_3 + R_3$) in R_1; daher auch (da in 3: $R = R_1 Q_2 + R_2$) in R; mithin auch (da nach 2: $B = Q_1 R + R_1$) in B; und endlich (da in 1: $A = BQ + R$) auch in A ohne Rest enthalten.

§. 50. Es ist uns nach [43] und [35] ein einfaches Mittel an die Hand gegeben, jeden gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch zu verwandeln; denn es sey der Bruch $\frac{a}{b}$; so hat man: $\frac{a}{b} = \frac{a \,.\, 10^n}{b \,.\, 10^n} = \left(\frac{a \,.\, 10^n}{b}\right) 10^{-n}$; setzen wir nun $\frac{a \,.\, 10^n}{b} = A$; so hat man $\frac{a}{b} = A \,.\, 10^{-n}$.

Unter der Voraussetzung, daß a und b relative Primzahlen sind, können hier folgende Fälle stattfinden.

1. Da 10, sowie 10^n keine andern Faktoren als 2 und 5 hat, so wird die angezeigte Division $\frac{a \,.\, 10^n}{b}$ nur in dem Falle sich aufheben, wenn der Nenner b keine andern Faktoren enthält, als 2 oder 5. (Vollständiger Dezimalbruch).

2. Ist b eine von 2 und 5 verschiedene Primzahl, so wird die Rechnung sich nicht aufheben; da aber nur $b - 1$ verschiedene Reste möglich sind, so müssen im Quotienten nach $b - 1$ Zifferstellen die nemlichen sich wiederholen (wenn nicht die Wiederholung der nemlichen Ziffer schon früher statt hatte). (Rein periodischer Dezimalbruch).

Aehnliches wird statt haben, wenn zwar b keine Primzahl ist, aber weder den Faktor 2 noch 5 enthält.

3. Enthält b außer dem Faktor 2 oder 5 noch eine andere Primzahl als Faktor, so wird die Division sich nicht aufheben, sondern es werden im Quotienten auch eine oder mehrere Zifferstellen sich wiederholen; aber diesen periodischen Stellen werden andere Zifferstellen vorausgehen, die in der Periode nicht mehr vorkommen; (gemischt periodischer Dezimalbruch).

§. 51. Will man nun einen Dezimalbruch in einen gemeinen verwandeln, so berücksichtigen wir 1. ob er vollständig, 2 rein periodisch, oder 3. gemischt periodisch sey.

ad 1. Wir geben dem Dezimalbruche seinen entsprechenden Nenner, und verkleinern, wenn es angeht. (§. 41. Zus. 2)

ad 2. Ist der zu verwandelnde Dezimalbruch rein periodisch, also unter der Form: $a\beta^{-1}+b\beta^{-2}+a\beta^{-3}+b\beta^{-4}+a\beta^{-5}+b\beta^{-6}\ldots\ldots$ so setzen wir:

$$x=a\beta^{-1}+b\beta^{-2}+a\beta^{-3}+b\beta^{-4}+a\beta^{-5}+b\beta^{-6}\ldots\ldots\ldots (1$$

Enthält nun die Periode n Zifferstellen, so multiplizirt man beiderseits mit β^n; in unserm Falle mit β^2; daher hat man:

$$\beta^2 x=a\beta+b+a\beta^{-1}+b\beta^{-2}+a\beta^{-3}+b\beta^{-4}\ldots\ldots\ldots (2$$

Subtrahiren wir nun die Gleichung (1 von der Gleichung (2, so erhält man:

$$\beta^2 x-x=a\beta+b \text{ oder}$$
$$x(\beta^2-1)=a\beta+b; \text{ also}$$
$$x=\frac{a\beta.+b}{\beta^2-1}.$$

ad 3. Ist der Dezimalbruch gemischt periodisch, also unter der Form: $a\beta^{-1}+b\beta^{-2}+c\beta^{-3}+d\beta^{-4}+e\beta^{-5}+d\beta^{-6}+e\beta^{-7}+d\beta^{-8}+e\beta^{-9}\ldots$ so setzen wir:

$$x=a\beta^{-1}+b\beta^{-2}+c\beta^{-3}+d\beta^{-4}+e\beta^{-5}+d\beta^{-6}+e\beta^{-7}+d\beta^{-8}+e\beta^{-9}\ldots\ldots (3$$

Enthält nun die Periode m Zifferstellen, und gehen der Periode n Zifferstellen voraus, die sich nicht wiederholen, so multiplizirt man die Gleichung (3 mit β^{m+n}, und dann mit β^n. In diesem Falle ist $m=2$, $n=3$; also $m+n=5$.

Multiplizirt man die Gleichung (3 mit β^5, so erhält man:

$$\beta^5 x=a\beta^4+b\beta^3+c\beta^2+d\beta+e+d\beta^{-1}+e\beta^{-2}+d\beta^{-3}+e\beta^{-4}\ldots\ldots (4$$

Ferner multipliziren wir die Gleichung (3 mit β^3, so erhält man:

$$\beta^3 x=a\beta^2+b\beta+c+d\beta^{-1}+e\beta^{-2}+d\beta^{-3}+e\beta^{-4}\ldots\ldots (5$$

Subtrahirt man nun die Gleichung (5 von (4, so hat man:

$\beta^5 x - \beta^3 x = (a\beta^4 + b\beta^3 + c\beta^2 + d\beta + e) - (a\beta^2 + b\beta + c)$; daher

$$x = \frac{a\beta^4 + b\beta^3 + c\beta^2 + d\beta + e - (a\beta^2 + b\beta + c)}{\beta^3(\beta^2 - 1)}.$$

Radiziren.

§. 52. Ist eine Potenz und ihr Exponent gegeben, und wir suchen den Dignand, so heißt dieß Radiziren (Wurzelausziehen); die gegebene Potenz heißt Radikand; der gegebene Exponent heißt Radikator (Wurzel-Exponent), und der gesuchte Dignand heißt Wurzel.

Der allgemeine Ausdruck einer Wurzel ist: $\sqrt[m]{a}$; a ist Radikand; m Radikator. Radikand durch Radikator radizirt, gibt die Wurzel.

Anmerk. 1. Die Wurzel einer Zahl kann wieder als eine Zahl betrachtet werden.

Anmerk. 2. Ist der Radikator 2, 3 oder 4, so heißt die Wurzel beziehungsweise: Quadrat-, Kubik-, Biquadratwurzel. Der Radikator 2 wird gewöhnlich weggelassen; man schreibt also statt $\sqrt[2]{a}$ gewöhnlich $\sqrt{a}$.

§. 53. Vergleichen wir §. 36., §. 52., so ergeben sich unmittelbar folgende Sätze:

1. $[\sqrt[m]{a}]^{m} = a$ [53]

d. h. die Wurzel mit dem Radikator potenzirt, gibt den Radikand.

2. $\sqrt[m]{(a^m)} = a$ [54]

d. h. die Potenz durch den Exponenten radizirt, gibt den Dignand.

Zus. 1. Radiziren heißt also auch, einen Ausdruck suchen, der mit dem Radikator potenzirt, den Radikand gibt.

Zus. 2. Ist der Radikand 1, so ist jede Wurzel 1.

§. 54. Hat man: a=b; so ist auch: $\sqrt[m]{a} = \sqrt[m]{b}$ [55] und umgekehrt.

Anmerk. Eine Erläuterung dieses Satzes später.

§. 55. Aus den bisher über Potenzen und Wurzeln aufgestellten Sätzen ergeben sich die nachfolgenden

Lehrsätze. 1. Ein Produkt wird durch eine Zahl radizirt, wenn man jeden Faktor durch die Zahl radizirt, und die erhaltenen Wurzeln miteinander multiplizirt; d. i.

$$\sqrt[m]{(a \, . \, b)} = \left(\sqrt[m]{a}\right)\left(\sqrt[m]{b}\right) \; [56].$$

Zum Beweise potenzire man beiderseits mit m, so hat man:

$$\left(\sqrt[m]{(a.b)}\right)^m = a \, . \, b \; [53]$$

$$\left(\left(\sqrt[m]{a}\right) . \left(\sqrt[m]{b}\right)\right)^m = \left(\sqrt[m]{a}\right)^m . \left(\sqrt[m]{b}\right)^m = a \, . \, b$$

Daher auch:

$$\left(\sqrt[m]{(ab)}\right)^m = \left(\left(\sqrt[m]{a}\right)\left(\sqrt[m]{b}\right)\right)^m.$$

Hieraus ergibt sich der aufgestellte Satz (nach 55 umgekehrt.)

Umgekehrt: Zwei Wurzeln mit gleichem Radikator werden multiplizirt, wenn man das Produkt der Radikanden durch den gemeinschaftlichen Radikator radizirt.

2. Ein Quotient wird durch eine Zahl radizirt, wenn man Dividend und Divisor durch die Zahl radizirt, und die erste Wurzel durch die zweite dividirt; d. i.

$$\sqrt[m]{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} \; [57].$$

Zum Beweise potenzire man beiderseits mit m, und verfahre wie oben.

Umgekehrt: Zwei Wurzeln mit gleichem Radikator werden dividirt, wenn man den Radikand des Di-

vidends dividirt durch den Radikand des Divisors, und diesen Quotient mit dem gemeinschaftlichen Radikator radizirt.

3. Eine Potenz wird durch eine Zahl radizirt, wenn man den Exponent durch die Zahl dividirt, und mit dem erhaltenen Quotienten den Dignand potenzirt; d. i.

$$\sqrt[m]{(a^x)} = a^{\frac{x}{m}} \quad [58].$$

Zum Beweise potenzire man jeden dieser Ausdrücke mit m, und verfahre wie oben.

Umgekehrt: Eine Zahl wird durch einen Quotienten potenzirt, wenn man die Zahl mit dem Dividend potenzirt, und die erhaltene Potenz mit dem Divisor radizirt.

Zus. Da $\frac{x}{m} = \frac{cx}{cm}$ [43], so ist $a^{\frac{x}{m}} = a^{\frac{cx}{cm}}$; daher auch $\sqrt[m]{a^x} = \sqrt[cm]{a^{cx}}$ d. h. eine Wurzel wird nicht geändert, wenn man Radikator und Exponent des Radikands mit der nemlichen Zahl multiplizirt oder dividirt.

4. Eine Wurzel wird durch eine Zahl radizirt, wenn man den Radikand durch das Produkt der Zahl und des Radikators radizirt; d. i.

$$\sqrt[m]{\sqrt[x]{a}} = \sqrt[mx]{a} \quad [59].$$

Zum Beweise potenzire man beiderseits mit mx; das Uebrige wie oben:

Umgekehrt: Eine Zahl wird durch ein Produkt radizirt, wenn man die Zahl durch einen Faktor radizirt, und die erhaltene Wurzel durch den andern Faktor radizirt.

§. 56. Unter Anwendung der oben vorausgeschickten Gesetze können wir jede Zahl auf die Form einer Wurzel oder Po-

tenz mit beliebigem Radikator oder Exponenten zurückführen, da nach [54]: $a = \sqrt[m]{a^m}$, und nach [53]: $a = (\sqrt[m]{a})^m$ ist.

Eben so können wir (§. 55 3. Zus.) Wurzeln mit verschiedenem Radikator auf Wurzeln mit gleichem Radikator bringen; denn man hat z. B. $\sqrt[m]{a^x} \cdot \sqrt[p]{c^q} = \sqrt[mp]{a^{px}} \cdot \sqrt[mp]{c^{mq}} = \sqrt[mp]{a^{px} \cdot c^{mq}}$.

Endlich kann man auch den Nenner eines Radikands entfernen; denn es ist z. B. $\sqrt[m]{\frac{a}{b^x}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b^x} \cdot \frac{b^{m-x}}{b^{m-x}}}$ [43]

$$= \sqrt[m]{\frac{a \cdot b^{m-x}}{b^m}} = \frac{\sqrt[m]{a \cdot b^{m-x}}}{b} \quad [57 \text{ und } 54]$$

$$= \frac{1}{b} \sqrt[m]{ab^{m-x}}.$$

§. 57. Wir wollen nun untersuchen, wie negative Ausdrücke, in so fern sie Dignande oder Radikande sind, behandelt werden.

1. Hat man allgemein: $(-a)^n$, so muß unterschieden werden, ob n α) gerade oder β) ungerade sey.

α) Ist n gerade, also $n=2m$, so hat man $(-a)^{2m}=a^{2m}$ [**60**] dann: $(-a)^{2m} = [(-a)^2]^m = [(-a)(-a)]^m = (aa)^m = (a^2)^m = a^{2m}$; d. h. ein negativer Ausdruck wird mit einer geraden Zahl potenzirt, wenn man das Glied des negativen Ausdruckes mit der geraden Zahl potenzirt.

β) Ist aber n ungerad, also $n = 2m + 1$, so hat man:

$$(-a)^{2m+1} = -(a^{2m+1}) \ [\mathbf{61}] \text{ d. h.}$$

Ein negativer Ausdruck wird mit einer ungeraden Zahl potenzirt, wenn man das Glied des negativen Ausdruckes mit der Zahl potenzirt und die Potenz zum Gliede eines negativen Ausdruckes macht.

Der Beweis ergibt sich auf ähnliche Weise wie unter α).

2 Ist gegeben $\sqrt[n]{-a}$, so wird wieder unterschieden ob n α) gerade und β) ungerade sey.

α) Ist $n = 2m$, so hat man: $\sqrt[2m]{-a}$; d. h. es soll ein Ausdruck gefunden werden, der mit 2m (einer geraden Zahl) potenzirt — a (einen negativen Ausdruck) gibt; dieß aber widerspricht dem obigen Satze (60); daher dieser Forderung nicht entsprochen werden kann; eine gerade Wurzel aus einem negativen Ausdrucke nennt man deßwegen einen imaginären Ausdruck; gewöhnlich gibt man diesem die einfache Form: $p\sqrt{-1}$.

β) Hat man: $\sqrt[2m+1]{-a}$, so ergibt sich nach (1. β), daß:

$$\sqrt[2m+1]{-a} = -\sqrt[2m+1]{a}$$

Zus. Ist der Ausdruck $\sqrt[2m]{a}$ gegeben, so folgt aus §. 53 Zus. 1 und [60]; daß

$$\sqrt[2m]{a} = \pm\sqrt[2m]{a}.$$

Quadrat und Quadratwurzel, Kubus und Kubikwurzel.

§. 58. Zur vollständigen Darstellung der Gesetze über Potenzen und Wurzeln gehörte noch, anzugeben, wie eine Summe oder Differenz (Aggregat) mit einer beliebigen Zahl potenzirt oder durch eine beliebige Zahl radizirt wird. Da aber diese Untersuchungen in ihrer Allgemeinheit das Gebiet der Elemente überschreiten, so behandeln wir nur die speziellen Fälle, wenn der Exponent und Radikator keine andern Zahlen als 2 und 3 sind. Wir betrachten also zuerst Quadrat und Quadratwurzel, dann Kubus und Kubikwurzel.

§. 59. Bei den in §. 58. angedeuteten Untersuchungen werden wir vorzüglich auch auf bestimmte Zahlen Rücksicht nehmen, und zu diesem Zwecke merke man sich, daß beziehungsweise, wenn

$a = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ ist;

$a^2 = 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100$ sey;

und umgekehrt.

Um das Quadrat einer Summe oder Differenz (zweitheiligen Größe) zu finden hat man:

$$(a \pm b)^2 = (a \pm b)(a \pm b) = a^2 \pm 2ab + b^2 \quad [62]$$

d. h. das Quadrat einer zweitheiligen Größe besteht 1. aus dem Quadrate des ersten Theiles; 2. aus dem doppelten Produkte des ersten und zweiten Theils, und 3 aus dem Quadrate des zweiten Theils.

Nach diesem Gesetze kann jede zweitheilige Größe quadrirt werden; so hat man:

$(4a^2-5x^3)^2=16x^4-40a^2x^3+25x^6$

$(7a^{-3}+5a^{-1})^2=49a^{-6}+70a^{-4}+25a^{-2}$

$(3a\sqrt[3]{b^2}-2b\sqrt[2]{a})=9a^2b\sqrt[3]{b}-12ab\sqrt[6]{a^3b^4}+4ab^2.$

Zus. 1. Addirt man zur Summe zweier Quadrate das doppelte Produkt ihrer Wurzeln, so erhält man das Quadrat der Summe der Wurzeln; d. i. $(a^2+b^2)+2ab=(a+b)^2$. Eben so hat man: $(x^2+y^2)-2xy=(x-y)^2=(y-x)^2$.

Zus. 2. Man hat auch:

$(a^2+2ab+b^2)-4ab=(a-b)^2$

$(a^2-2ab+b^2)+4ab=(a+b)^2.$

Zus. 3. Die Differenz zweier Quadrate ist ein Produkt aus der Summe und Differenz ihrer Wurzeln; d. i. $(a^2-b^2)=(a+b)(a-b)$; und umgekehrt. (Vergl. §. 34. 2.)

Zus. 4. Nach Zus. 2. und [62] läßt sich das Produkt zweier Zahlen, deren Differenz eine gerade Zahl ist, leicht finden; denn ist $a-b=2d$, so hat man:

$ab=[(a-d)+d][a-d)-d]=(a-d)^2-d^2.$

So ist $85\times75=(80+5)(80-5)=6400-25=6375$.

§. 60. Der Satz [62] kann in größerer Allgemeinheit auch folgendermassen ausgedrückt werden: hat man das Quadrat einer Zahl (a) gefunden, und es kommt zu dieser Zahl noch ein neues Glied (b) hinzu, so vermehrt sich das Quadrat (a^2) der bereits vorhandenen Zahl um zwei Glieder, nemlich um das Doppelte der neu hinzukommenden Zahl, mit der vorhandenen multiplizirt; und um das Quadrat der neu hinzugekommenen.

Nach diesem Gesetz hat man unmittelbar z. B.

$(2a-3b+4c-5x+1)^2=4a^2-12ab+9b^2+16ac$
$-24bc+16c^2-20ax+30bx-40cx+25x^2+4a$
$-6b+8c-10x+1.$

Eben so einfach hat man:

$(5786)^2 = 25 \ldots\ldots\ldots = a^2$
$70 \ldots\ldots\ldots = 2ab$
$49 \ldots\ldots = b^2$
$912 \ldots\ldots = 2(a+b)c$
$64 \ldots\ldots = c^2$
$6936 \ldots = 2(a+b+c)d$
$36 \ldots = d^2$

$(5786)^2 = \overline{23477796}$

Zus. 1. Aus dem vorausgehenden Zahlenquadrate sehen wir, daß die Quadrate der einzelnen Ziffern, die auf der ersten, zweiten, dritten .... Stelle stehen, beziehungsweise die zweite, vierte, sechste .... Stelle nicht überschreiten.

Um aber allgemein aus der Anzahl der Ziffern einer Zahl auf die Anzahl der Ziffern ihres Quadrats schließen zu können, haben wir: $a\beta^{n\ \ 1}$ als eine Zahl von n ZifferStellen.

Nun ist: $(a\beta^{n-1})^2 = a^2\beta^{2n-2}$.

Setzen wir nun $a^2 = b\beta + c$; so haben wir:
$a^2\beta^{2n-2} = (b\beta + c)\beta^{2n-2} = b\beta^{2n-1} + c\beta^{2n-2}$,
welche Zahl 2n Zifferstellen hat; setzen wir dagegen $a^2 = 1$, so hat β^{2n-2} $(2n-1)$ Zifferstellen.

Das Quadrat einer Zahl von n Zifferstellen hat also 2n oder 2n—1 Zifferstellen.

Zus. 2. Eine Zahl, deren letzte Ziffer 2, 3, 7, 8 ist, kann nie das Quadrat einer Zahl seyn.

§. 61. Um aus einem zusammengesetzten (mehrtheiligen) Quadrate die Wurzel zu finden, schlägt man den umgekehrten Weg ein, der uns zum Quadrate einer zusammengesetzten Zahl geführt hat. Sey gegeben:

$$\sqrt{(9a^2 - 30ab + 42ax + 25b^2 - 70bx + 49x^2)}.$$

Vor Allem weiß man, daß in einem geordneten Quadrate das erste Glied das Quadrat des ersten Gliedes der Wurzel ist. In unserm Falle ist also 3a das erste Glied der Wurzel. Subtrahirt man von dem gegebenen Radikand das Quadrat des ersten Theils der Wurzel $(9a^2)$, so bleibt das doppelte Produkt des

ersten und zweiten Theils ꝛc. .... Das nächste Glied des Radikands ($-30ab$) ist also das doppelte Produkt des ersten Theils in den zweiten; dividirt man nun durch den doppelten ersten Theil, (also durch $6a$) in ($-30ab$), so erhalten wir ($-5b$) als zweiten Theil. Man subtrahirt nun dieses doppelte Produkt der beiden ersten Theile und das Quadrat des zweiten Theils ($25b^2$); den Rest dividirt man neuerdings durch das Doppelte der bisher gefundenen Theile (durch $6a-10b$), und fährt auf ähnliche Weise fort, bis die Wurzel entweder vollständig gefunden ist, oder bis sich in der Rechnung zeigt, daß sich die Wurzel als eine unendliche Reihe darstellt. Für den oben gegebenen Radikand findet man die vollständige Wurzel: $3a-5b+7x$.

Der Operation gibt man dann eine bequeme Form.

Hat man z. B.

$$\sqrt{(4a^2-12ac+9c^2+\frac{4ab-6bc}{x}+\frac{b^2}{x^2})}.$$

so steht die Rechnung gewöhnlich so:

$$\begin{array}{l}
\sqrt{4a^2-12ac+9c^2+\frac{4ab-6bc}{x}+\frac{b^2}{x^2}}=2a-3c+\frac{b}{x} \\
4a^2 \\
- \\
\hline
-12ac \\
\quad (4a) \\
-12ac+9c^2 \\
+\quad - \\
\hline
\quad\frac{4ab}{x} \\
\quad (4a-6c) \\
-\frac{4ab}{x}+\frac{6bc}{x}\pm\frac{b^2}{x^2} \\
\hline
\qquad 0
\end{array}$$

§. 62. Soll man die Wurzel aus einem Zahlenquadrate bestimmen, so weiß man vorläufig aus § 60. Zusatz. 1., wie viele Ziffern die Wurzel enthalten muß. Die Operation ist der in §. 61. angegebenen ganz ähnlich.

Hat man z. B. $\sqrt{555025}$, so enthält die Wurzel drei Ziffernstellen, ist also unter der Form:

$a+b+c$ enthalten; nun ist aber:

$(a+b+c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2c(a+b) + c^2$.

Die Ausführung steht nun so:

$$\begin{array}{rll}
 & & a+b+c \\
\sqrt{555025} & = \sqrt{(a^2+2ab+b^2+2c(a+b)+c^2)} & = 700+40+5 \\
490000 & = a^2 & = 745 \\
- & - & \\
\hline
65025 & = 2ab+b^2 \ldots & \\
(1400) & = 2a & \\
56000 & = 2ab & \\
1600 & = b^2 & \\
\hline
57600 & = 2ab+b^2 & \\
- & - \quad - & \\
\hline
7425 & = 2c(a+b)+c^2 & \\
(1480 & = 2(a+b) & \\
7400 & = 2c(a+b) & \\
25 & = c^2 & \\
\hline
7425 & = 2c(a+b)+c^2 & \\
- & - \quad - & \\
\hline
 & 0 &
\end{array}$$

Zus. Mit Rücksicht auf §. 60. Zus. 1. kann dieses Verfahren noch bedeutend abgekürzt werden, wie wir später zeigen werden.

§. 63. Nach §. 60 und § 37, 2. kann man leicht das Quadrat jeder (ganzen oder gebrochenen) Zahl finden. Wollen wir aber umgekehrt jede Zahl als Quadrat betrachten, und die entsprechende Wurzel finden, so stoßen wir auf Schwierigkeiten. Denn hätte man z. B. $\sqrt{6}$ anzugeben, so sollen wir eine Zahl suchen, die zweimal als Faktor gesetzt, 6 gibt. Eine ganze Zahl gibt es offenbar nicht, die dieser Forderung entspricht; denn 3 ist zu groß; 2 aber zu klein. Die Wurzel liegt aber nothwendig zwischen 2 und 3. Ein (unächter) vollständiger Bruch kann die Wurzel nicht seyn; weil das Quadrat dieses Bruches wieder einen Bruch, aber keine ganze Zahl gibt. In diesem Falle begnügen wir uns, die Wurzel durch Näherung zu finden.

Da nemlich $6 = \frac{6 \cdot a}{a}$ [30] ist, und a jede beliebige Zahl

seyn kann, so setzen wir $a = 10^{2n}$, wo uns n jede ganze Zahl bedeutet. Dann erhalten wir: $\sqrt{6} = \sqrt{\frac{6 \cdot 10^{2n}}{10^{2n}}} =$

$$\frac{\sqrt{6 \cdot 10^{2n}}}{\sqrt{10^{2n}}} = \frac{\sqrt{6 \cdot 10^{2n}}}{10^{n}}$$

Setzt man nun statt n eine beliebige ganze Zahl, und sucht $\sqrt{6 \cdot 10^{2n}}$ und dividirt die erhaltene Wurzel durch 10^n so hat man $\sqrt{6}$ um so genauer, je größer n ist.

Nehmen wir nun $n = 4$, so hat man:

$$\sqrt{6} = \frac{\sqrt{600000000}}{10000}$$

Um auf kürzestem Wege die angezeigte Wurzel zu erhalten, theilen wir den Radikand von der rechten gegen die linke in Klassen von je zwei Zifferstellen, und verfahren, wie folgt:

$\sqrt{6|00|00|00|00} = 24494$
4
200
(4)4
176
2400
(48)4
1936
46400
(488)9
44001
239900
(4898)4
195936
43964

Es ist also $\sqrt{6} = \frac{24494}{10000} = 2{,}4494$.

Wäre $\sqrt{6}$ vollständig gefunden, so müßte $(2{,}4494)^2$ die Zahl 6 geben; es ist aber:
$(2{,}4494)^2 = 5{,}99956$: dagegen wenn wir die gefundene Wurzel um, 0,0001 vergrößern, so hat man: $(2{,}4495)^2 = 6{,}00005$. Die

gefundene Wurzel ist also noch zu klein; aber der Unterschied dieser Wurzel und der wahren beträgt weniger als 0,0001: hätte man $n = 6$ oder 8 oder noch größer genommen, so hätte man die Wurzel noch genauer gefunden, und um so näher dem wahren Werthe, je größer wir n nehmen; da wir aber n so groß annehmen können, als wir wollen, so können wir auch die Wurzel so genau finden, als wir wollen.

Zus. 1. Wurzeln aus solchen Zahlen, welche keine (entsprechende) Potenzen sind, heißen irrational.

Zus. 2. Irrationalzahlen kann man als vollständige (gebrochene) Zahlen betrachten.

Zus. 3. Will man die Quadrat Wurzel aus einer Zahl suchen, die kein vollständiges Quadrat ist, so hängt man der Zahl beliebig viel Paare von Nullen an, sucht aus der so erhaltenen Zahl die Wurzel, und schneidet in der Wurzel so viele Dezimalstellen ab, als man Nullen-Paare angehängt hat.

§. 64. Soll man die Quadrat-Wurzel eines Bruches finden, so finden wir auch die Wurzel, wenn sie rational ist nach [57]. Man hat daher $\sqrt{\frac{a^2}{b^2}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{b^2}} = \frac{a}{b}$.

Ist aber die Wurzel irrational, so macht man den Nenner rational, indem man Zähler und Nenner mit einer solchen Zahl multiplizirt, daß dadurch der Nenner ein Quadrat wird. Man hat also: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \sqrt{\frac{a \cdot b}{b \cdot b}} = \frac{\sqrt{ab}}{b}$; eben so: $\sqrt{\frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{15}{25}}$ $= \frac{\sqrt{15}}{5}$; man sucht nun nach §. 63. die Wurzel aus 15 und dividirt diese durch 5.

Für Dezimalbrüche gilt dasselbe; nur ist in diesem Falle das Verfahren deßwegen einfacher, weil der Nenner entweder schon rational ist (wenn die Zahl der Dezimalstellen gerade ist), oder durch Anhängung einer Null an den Zähler rational wird.

Man kann gemeine Brüche in Dezimalbrüche verwandeln, und dann aus diesen die Wurzel bestimmen.

§. 65. Hat man eine irrationale Wurzel so weit bestimmt, daß man bereits n Dezimalstellen kennt, so findet man n weitere Stellen der Wurzel genau, wenn man bloß mit der doppelten Wurzel in den Rest dividirt. Denn es sey die gefundene Wurzel a, die noch zu suchenden Stellen seyen x (x ist hier ein kleiner Dezimalbruch), und der Rest sey R, so hat man: $(a+x)^2 = a^2+2ax+x^2$; nun hat man das Quadrat der gefundenen Wurzel (a^2) bereits abgezogen; es ist daher $R = 2ax + x^2$; da aber der Zahl x bereits n Dezimalstellen vorausgehen, so ist $x < \beta^{-n}$ daher $x^2 < \beta^{-2n}$; d. h. x^2 hat auf 2n Stellen keinen Einfluß mehr; wir haben also, wenn wir x^2 weglassen (weil es auf unser Resultat keinen Einfluß hat): $R = 2ax$; daher $x = \frac{R}{2a}$.

Zus. Der höchste Rest, der übrig bleiben kann, wenn wir bereits die Wurzel a gefunden haben, ist: 2a.

§. 66. Das Quadrat einer zweitheiligen Größe enthält immer drei Glieder; quadrirt man aber eine zweitheilige Größe, wovon die eine (oder beide) irrational sind, so werden häufig zwei Glieder in eins vereinigt, und dadurch wird das Quadrat zweigliedrig. So hat man z. B.

$$(3+\sqrt{5})^2 = 9+6\sqrt{5}+5 = 14+6\sqrt{5}.$$

Soll man nun aus einem solchen zweigliedrigen Quadrat die Wurzel bestimmen; so reicht das bisherige Verfahren nicht hin; wir schlagen nun folgenden Weg ein, der sich darauf stützt, daß die Wurzel zweigliederig seyn muß, und jedes Glied irrational seyn kann.

Wir setzen also: $\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{x} \pm \sqrt{y} \ldots.)1$

Quadrirt man beiderseits, so hat man:

$$a \pm \sqrt{b} = x + y \pm 2\sqrt{xy}.$$

Nun besteht jede Seite dieser Gleichung aus einem rationalen und irrationalem Theile; wir setzen also Rationales dem Rationalen, und Irrationales dem Irrationalen gleich (Gleichartiges identifizirt), so hat man:

$$a = x + y \ldots. (2$$
$$\pm\sqrt{b} = \pm 2\sqrt{xy}.$$

Quadriren wir nun in beiden Gleichungen jede Seite, und subtrahiren dann die zweite Gleichung von der ersten, (§. 59. Zus. 2.), so hat man:

$$\begin{array}{rl} a^2 = & x^2 + 2xy + y^2 \\ b = & 4xy \\ - & \quad - \\ \hline a^2 - b = & x^2 - 2xy + y^2 \end{array}$$

Aus beiden Seiten der letzten Gleichung die Quadratwurzel gezogen, erhält man:

$$\sqrt{a^2 - b} = x - y \ldots (3$$

Addiren wir nun die Gleichungen (2 und (3, so hat man:

$$\begin{array}{rl} a = & x + y \\ \sqrt{a^2 - b} = & x - y \\ \hline a + \sqrt{a^2 - b} = & 2x; \text{ daher} \end{array}$$

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2} \ldots (4$$

Subtrahirt man die Gleichung (3 von (2, so hat man:

$$\begin{array}{rl} a = & x + y \\ \sqrt{a^2 - b} = & x - y \\ - \qquad\quad & - \; + \\ \hline a - \sqrt{a^2 - b} = & 2y; \text{ daher} \end{array}$$

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2} \ldots (5$$

Setzen wir nun die in (4 und (5 gefundenen Werthe in (1 an die gehörige Stelle, so hat man:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 - b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a - \sqrt{a^2 - b}}{2}}$$

Hätte man z. B. $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}}$; so ist $a = 9$; $b = 4\sqrt{5}$ $= \sqrt{80}$ daher:

$$\sqrt{9 + \sqrt{5}} = \sqrt{\frac{9 + \sqrt{81 - 80}}{2}} + \sqrt{\frac{9 - \sqrt{81 - 80}}{2}}$$

$$= \sqrt{5} + \sqrt{4} = 2 + \sqrt{5}.$$

Kubus und Kubikwurzel.

§. 67. Vor Allem merke man, daß beziehungsweise, wenn:
$a = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10$ ist;
$a^3 = 1,\ 8,\ 27,\ 64,\ 125,\ 216,\ 343,\ 512,\ 729,\ 1000$ sey,
und umgekehrt.

Um den Kubus einer zweitheiligen Größe zu finden, hat man: $(a \pm b)^3 = (a \pm b)(a \pm b)(a \pm b) = (a^2 \pm 2ab + b^2)(a \pm b) = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$ [**63**]
d. h. der Kubus einer zweitheiligen Größe besteht 1) aus dem Kubus des ersten Theils; 2) aus dem dreifachen Quadrate des ersten Theils mit dem zweiten multiplizirt; 3) aus dem dreifachen Quadrate des zweiten Theils mit dem ersten multiplizirt, und 4) aus dem Kubus des zweiten Theils.

Nach diesem Gesetze kann jede zweitheilige Größe kubirt werden, so hat man:

$(5a^2 - 4b)^3 = 125a^6 - 300a^4b + 240a^2b^2 - 64b^3$

$(63)^3 = (60+3)^3 = 216000 + 32400 + 1620 + 27 = 250047$

$(a\sqrt[3]{b} - b\sqrt{a})^3 = a^3b\sqrt{b} - 3a^2b^2\sqrt[3]{a} + 3ab^2\sqrt[6]{a^4b^3} - ab^3.$

§. 68. Allgemeiner kann der Satz [63] ausgedrückt werden, wie folgt: hat man den Kubus einer Zahl (a) gefunden, und es kommt zur Zahl noch ein Glied, so vermehrt sich der bereits gefundene Kubus um drei Glieder, nemlich, um das Quadrat der vorhandenen Zahl, multiplizirt mit dem dreifachen, neu hinzugekommenen Gliede; dann um das Quadrat der neu hinzugekommenen Zahl, multiplizirt mit dem Dreifachen der vorhandenen Zahl; endlich um den Kubus der neu hinzugekommenen Zahl. Daraus ergibt sich:

$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3;$

eben so findet man:

$$(576)^3 = \left.\begin{array}{rl} 125 & \ldots\ldots\ a^3 \\ 525\ & \ldots\ldots\ 3a^2b \\ 735\ \ & \ldots\ldots\ 3ab^2 \\ 343\ \ \ & \ldots\ldots\ b^3 \end{array}\right\} (a+b)^3$$

$\overline{185193}$

$$\begin{array}{rl}
185193 & \\
58482 \;\ldots\ldots\ldots & 3(a+b)^2c \\
6156 \;\ldots\ldots\ldots & 3(a+b)c^2 \\
216 \;\ldots = \ldots & c^3 \\
\hline
191102976 \;\ldots = \ldots & (a+b+c)^3
\end{array}$$

Zus. Kubirt man eine Zahl von n Zifferstellen, so hat der Kubus höchstens 3n oder wenigstens 3n—2 Zifferstellen. Denn $(a\beta^{n-1})^3 = a^3\beta^{3n-3}$; nun kann höchstens $a^3 = b\beta^2 + c\beta + d$ seyn: oder ist wenigstens 1. (Man vergleiche §. 60 Zus. 1.)

Wir sehen zugleich, daß die Kubuse der einzelnen Ziffer an der ersten, zweiten, dritten .... Stelle beziehungsweise die dritte sechste, neunte .... Stelle nicht überschreiten können.

§. 69. Um die Kubikwurzel aus einer zusammengesetzten Größe zu finden, verfährt man mit Rücksicht auf [63], wie bei Ausziehung der Quadratwurzel. Soll z. B.

$$\sqrt[3]{a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6)}$$

gefunden werden, so steht die Operation so:

$$\sqrt[3]{(a^6 - 6a^5b + 15a^4b^2 - 20a^3b^3 + 15a^2b^4 - 6ab^5 + b^6} = a^2 - 2ab + b^2$$

$$\begin{array}{l}
-a^6 \\
\hline
\quad -6a^5b \\
\quad (3a^4) \\
\quad -6a^5b + 12a^4b^2 - 8a^3b^3 \\
\quad + \quad - \quad + \\
\hline
\qquad 3a^4b^2 - 12a^3b^3 \\
\qquad (3a^4 - 12a^3b + 12a^2b^2) \\
\qquad 3a^4b^2 - 12a^3b^3 + 12a^2b^4 + 3a^2b^4 - 6ab^5 + b^6 \\
\qquad - \quad + \quad - \quad - \quad + \quad - \\
\hline
\qquad\qquad 0
\end{array}$$

§. 70. Hat man die Kubikwurzel aus einer Zahl zu suchen, z. B $\sqrt[3]{102503232}$, so wissen wir aus §. 68 Zus. daß die Wurzel 3 Zifferstellen enthält, also unter der Form (a+b+c) enthalten sey. Wir theilen nun den Radikand von

der rechten gegen die linke in Klassen von je drei Zifferstellen, und verfahren dann, wie folgt:

$$
\begin{array}{rl}
 & a+b+c \\
\sqrt[3]{102|503|232} & = 468 \\
64 & = a^3 \\
\hline
38503 & = 3a^2b+3ab^2 \dots \\
(48) & = 3a^2 \\
288 & = 3a^2b \\
432 & = 3ab^2 \\
216 & = b^3 \\
\hline
33336 & = 3a^2b+3ab^2+b^3 \\
\hline
5167232 & = 3(a+b)^2c+\dots \\
(6348) & = 3(a+b)^2 \\
50784 & = 3(a+b)^2c \\
8832 & = 3(a+b)c^2 \\
512 & = c^3 \\
\hline
5167232 & = 3(a+b)^2c+3(a+b)c^2+c^3 \\
\hline
 & 0
\end{array}
$$

Zus. 1. Soll die Kubikwurzel aus einer Zahl gefunden werden, die kein vollständiger Kubus ist, z. B. $\sqrt[3]{15}$, so verfährt man, wie §. 63; man setzt $\sqrt[3]{15} = \sqrt[3]{\frac{15 . 10^{3n}}{10^{3n}}} = \frac{\sqrt[3]{15 . 10^{3n}}}{10^n}$

Hat man die Wurzel aus $15 . 10^{3n}$ gefunden, so dividirt man mit 10^n. Daraus folgt die Regel: Man hänge an die Zahl, aus der man die Kubikwurzel näherungsweise finden soll, 3n Nullen an, schneide dann in der Wurzel n Dezimalstellen ab.

Zus. 2. Bei der Kubikwurzel aus einem Bruche, z. B. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ setze man nach (§. 64.), wenn nicht a und b, oder wenigstens b ein Kubus ist: $\sqrt[3]{\frac{a}{b}} = \sqrt[3]{\frac{a . b^2}{b . b^2}} = \frac{\sqrt[3]{ab^2}}{b}$.

So hat man: $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{18}{27}} = \frac{\sqrt[3]{18}}{3} = \frac{2,6207}{3} =$ 0,8735.

Zus. 3. Hat man die Wurzel aus einem Dezimalbruche zu bestimmen, so muß der Nenner rational, also unter der Form 10^{-3n} enthalten seyn. Ist diese Form noch nicht vorhanden, so hängt man dem Zähler eine oder zwei Nullen an.

Aus gemeinen Brüchen könnte man die Kubikwurzel auch finden, wenn man sie zuerst in Dezimalbrüche verwandelt.

Logarithmiren.

§. 71. Erkl. Ist der Dignand und die Potenz gegeben, und man sucht den entsprechenden Exponenten, so heißt diese Operation das Logarithmiren. Der gegebene Dignand heißt Basis; die gegebene Potenz heißt Logarithmand; der gesuchte Exponent heißt Logarithmus. Der allgemeine Ausdruck eines Logarithmus ist: $\overset{b}{\log}\, a$; a ist Logarithmand, b die Basis.

Logarithmand für die Basis logarithmirt, gibt den Logarithmus.

Anmerk. 1. Der Logarithmus einer Zahl für eine Zahl als Basis, ist wieder eine Zahl.

Anmerk. 2. Die Logarithmen gleicher Zahlen für dieselbe Basis sind gleich.

§. 72. Vergleichen wir §. 71. mit §. 36. und §. 52., so ergibt sich daraus unmittelbar der Satz:

$$b^{\overset{b}{\log} a} = a \quad [64]$$

d. h. die Basis mit dem Logarithmus potenzirt gibt den Logarithmand.

Zus. Daraus leitet sich eine allgemeinere Definition des Logarithmus ab; Logarithmus ist jene Zahl, mit welcher die Basis potenzirt den Logarithmand gibt:

§. 73. Aus den bisherigen ergeben sich nun folgende Lehrsätze. 1. Ein Produkt wird logarithmirt, wenn man jeden Faktor logarithmirt, und die erhaltenen Logarithmen addirt (immer für dieselbe Basis); d. i.

$$\overset{b}{\log}(ac) = \overset{b}{\log}\, a + \overset{b}{\log}\, c \quad [65]$$

Bew. Man hat: $b^{(\overset{b}{\log} ac)} = ac$ (64)

eben so: $b^{(\overset{b}{\log} a + \overset{b}{\log} c)} = b^{\overset{b}{\log} a} \cdot b^{\overset{b}{\log} c} = a \cdot c$

daher $b^{\overset{b}{\log} (ac)} = b^{\overset{c}{\log} a + \overset{b}{\log} c}$.

Mithin auch: $\log(ac) = \log a + \log c$.

Umgekehrt: man erhält die Summe zweier Logarithmen, wenn man das Produkt der Logarithmanden logarithmirt.

Anmerk. Dieß so wie das Nachfolgende gilt nur für die nemliche Basis, die wir immer annehmen, wenn nicht eine andere Basis ausdrücklich gesetzt ist.

2. Ein Quotient wird logarithmirt, wenn man Dividend und Divisor logarithmirt, und den zweiten Logarithmus vom ersten subtrahirt; d. i

$$\log\left(\frac{a}{c}\right) = \log a - \log c \quad [66]$$

denn $b^{\log\left(\frac{a}{c}\right)} = \frac{a}{c}$

$$b^{(\log a - \log c)} = \frac{b^{\log a}}{b^{\log c}} = \frac{a}{c}$$

Also auch $b^{\log\left(\frac{a}{c}\right)} = b^{(\log a - \log c)}$

Mithin $\log\left(\frac{a}{c}\right) = \log . a - \log . c.$

Umgekehrt: zwei Logarithmen werden subtrahirt, wenn man den Logarithmand des Minuends dividirt durch den Logarithmand des Subtrahends, und den erhaltenen Quotienten logarithmirt.

3. Man erhält den Logarithmus einer Potenz, wenn man den Logarithmus des Dignands mit dem Exponenten multiplizirt; d. i.

$\log(a^m) = m \log a$ [67]

denn $b^{\log(a^m)} = a^m$

$b^{m \log a} = (b^{\log a})^m = (a)^m$; daher

$b^{\log(a^m)} = b^{m \log a}$; also auch

$\log(a^m) = m \log a.$

Umgekehrt: man erhält das Produkt einer Zahl in einen Logarithmus, wenn man den Logarithman dmit der Zahl potenzirt, und die Potenz logarithmirt.

4. Man erhält den Logarithmus einer Wurzel, wenn man den Logarithmus des Radikands durch den Radikator dividirt; d. i.

$$\log\left(\sqrt[m]{a}\right) = \frac{\log a}{m} = \frac{1}{m}\log a \quad [68]$$

denn: $b^{\log(\sqrt[m]{a})} = \sqrt[m]{a}$; eben so:

$b^{\frac{\log a}{m}} = \sqrt[m]{b^{\log a}} = \sqrt[m]{a}$; daher auch;

$b^{\log(\sqrt[m]{a})} = b^{\frac{\log a}{m}}$; und daraus folgt:

$$\log(\sqrt[m]{a}) = \frac{\log a}{m}.$$

Umgekehrt: man erhält den Quotienten eines Logarithmus durch eine Zahl, wenn man den Logarithmand durch den Divisor radizirt, und die erhaltene Wurzel logarithmirt.

5. Hat man den Logarithmus zweier Zahlen (a, c) für die Basis b, so erhält man den Logarithmus der Zahl a für die Basis c, wenn man die Logarithmen der Zahlen (a, c) für die Basis b dividirt; d. i.

$$\overset{c}{\log}\, a = \frac{\overset{b}{\log}\, a}{\overset{b}{\log}\, c} \quad [69]$$

denn: $b^{\overset{b}{\log} a} = a$;

$b^{\overset{b}{\log} c \,.\, \overset{c}{\log} a} = \left(b^{\overset{b}{\log} c}\right)^{\overset{c}{\log} a} = c^{\overset{c}{\log} a} = a$;

daraus folgt: $b^{\overset{b}{\log} a} = b^{\overset{b}{\log} c \,.\, \overset{c}{\log} a}$; also auch:

$\overset{b}{\log}\, c \,.\, \overset{c}{\log}\, a = \overset{b}{\log}\, a$; und

$$\overset{c}{\log}\, a = \frac{\overset{b}{\log}\, a}{\overset{b}{\log}\, c}.$$

Zus. Für die Basis m hätte man:

$${}^{c}\log a = \frac{{}^{m}\log a}{{}^{m}\log c}; \text{ also}$$

$$\frac{{}^{b}\log a}{{}^{b}\log c} = \frac{{}^{m}\log a}{{}^{m}\log c}; \text{ d. h.}$$

der Quotient der Logarithmen zweier Zahlen ist für jede beliebige Basis constant, wenn man nur Divisor und Dividend für dieselbe Basis nimmt.

§. 74. Die Logarithmen aller Zahlen für eine bestimmte Basis geben ein logarithmisches System. Die Basis selbst ist willkührlich; nur muß sie die Eigenschaft haben, daß sie mit beliebigen Zahlen potenzirt jede Zahl hervorbringt. Daher kann die Zahl 1, so wie eine negative Zahl nie Basis eines logarithmischen Systems werden.

Hat man für eine Basis alle Logarithmen berechnet, so findet man sie für eine andere Basis durch bloße Division (oder Multiplikation) [69].

Die Elementar-Mathematik gebraucht bloß Logarithmen jenes Systems, dessen Basis 10 ist; die Logarithmen dieses Systems heißen briggische oder gemeine; außer diesem Systeme ist nur noch eines in der höhern Analysis gebräuchlich, das natürliche oder nepper'sche, dessen Basis irrational ist.

§. 75. Für die Basis 10 ergeben sich nun folgende Logarithmen. Da

$10^0 =$	1;	so ist	$0 = \log$	1
$10^1 =$	10;	„ „	$1 = \log$	10
$10^2 =$	100;	„ „	$2 = \log$	100
$10^3 =$	1000;	„ „	$3 = \log$	1000
$10^4 =$	10000;	„ „	$4 = \log$	10000
$10^{-1} =$	$\frac{1}{10} = 0{,}1$;	„ „	$-1 = \log$	$0{,}1$
$10^{-2} =$	$0{,}01$;	„ „	$-2 = \log$	$0{,}01$
$10^{-3} =$	$0{,}001$;	„ „	$-3 = \log$	$0{,}001$
$10^{-4} =$	$0{,}0001$;	„ „	$-4 = \log$	$0{,}0001$ u. s. f.

Der Log. von 1 ist Null, der Logarithmus der Basis aber 1; dieß gilt für alle logarithmischen Systeme.

Die Logarithmen jener Zahlen, die keine ganzen Potenzen von 10 sind, müssen offenbar irrational seyn; also aus Ganzen und einem Bruche bestehen. So müssen die Logarithmen der Zahlen von 2 – 9 incl. kleiner als 1 und größer als 0 seyn; d. i. ächte Brüche seyn. Die Zahlen von

11— 99 incl. enthalten eben so 1 Ganzes, nebst einem Bruche;
101— 999 „ „ „ „ 2 Ganze, „ „ „
1001—9999 „ „ „ „ 3 „ „ „ „

Allgemein: hat eine Zahl n Zifferstellen, so hat ihr (briggischer) Logarithmus (n—1) Ganze. Ist umgekehrt ein Logarithmus mit n Ganzen gegeben, so muß die ihm zukommende Zahl (n+1) Zifferstellen enthalten.

Aus diesem Grunde heißt man die Ganzen eines Logarithmus Charakteristik oder Kennziffer; die Dezimalen führen wohl auch den Namen Mantisse.

Die Logarithmen ächter Brüche sind (da die Basis eine ganze Zahl ist) negativ.

§. 76. Die Logarithmen dienen zunächst dazu, die Zahlenverbindung einer höhern Stufe auf die nächst niedrige zurückzuführen. So verwandelt sich die Multiplikation und Division der Zahlen in eine Addition und Subtraktion ihrer Logarithmen; eben so verwandelt sich das Potenziren und Radiziren der Zahlen in eine Multiplikation und Division. (Man sehe die Sätze [65] bis [68].

Soll eine Zahl aus andern Zahlen (die als Produkte, Quotienten, Potenzen oder Wurzeln verbunden sind), gefunden werden, so nimmt man statt der Zahlen ihre Logarithmen aus den Tafeln, und führt die angezeigten Operationen mit Logarithmen aus; zuletzt erhält man (wenn nicht die zu suchende Zahl ein Exponent oder Radikator ist) nicht die gesuchte Zahl, sondern ihren Logarithmus; und aus diesem erst findet man vermittelst der Tafeln die entsprechende Zahl (Logarithmand). Zu diesem Ende ist die Kenntniß der Einrichtung solcher Tafeln vor Allem nothwendig.

Geht man von der Verbindung der Zahlen auf die Verbindung ihrer Logarithmen über, so heißt dieß logarithmiren (im engern Sinne); geht man aber von der Verbindung der Logarithmen auf die ihrer Zahlen über, so heißt dieß delogarithmiren. Die Gesetze hiefür sind in den Sätzen [65] bis [68] enthalten. Hat man z. B.

$$y = \sqrt[m]{\frac{a^x b}{m^3 \sqrt{y}}} \quad . \; . \; . \; . \; (1$$

so folgt:

$$\log y = \frac{1}{m}[x \log a + \log b - (3 \log m + \frac{1}{2} \log y)] \quad . \; . \; . \; . \; (2$$

Geht man von der Gleichung (1 auf (2 über, so hat man logarithmirt; von (2 auf (1 zurück heißt delogarithmiren.

Summen und Differenzen kann man einer logarithmischen Behandlung nicht unterwerfen.

§. 77. Im Briggischen System unterscheiden sich die Logarithmen ganzer Zahlen von den Logarithmen der Dezimalbrüche nur durch die Charakteristik; denn hat man: $y = A\,10^{-n}$, wo A den Zähler des Dezimalbruchs ausdrückt, der aus n Ziffer-stellen besteht, so hat man: $\log y = \log (A \,.\, 10^{-n}) = \log A - n \log 10 = \log A - n$ d. h. man erhält den Logarithmus eines Dezimalbruches, wenn man den Zähler als ganze Zahl logarithmirt, und davon so viele Ganze abzieht, als der Zähler Dezimalstellen enthält. So hat man z. B. $\log 0{,}537 = 2.7299743 - 3$; dieser Logarithmus kann jedoch verschieden ausgedrückt werden; so hat man z. B. $\log 0{,}0861 = 2.9350032 - 4 = 0.9350032 - 2 = 3.9350032 - 5$ u. s. f.

Wenn die Operation die Bezeichnung willkührlich läßt, so nimmt man als erste Charakteristik gewöhnlich Null an. Daher $\log 0{,}537 = 0.7299743 - 1$.

Die Logarithmen gemeiner Brüche werden auf die nemliche Form zurückgeführt; denn man hat $\log (\frac{5}{8}) = \log 5 - \log 8$

$= 0.6989700 - 0.9030900 = -0.2041200$; statt dieser letztern unbequemen Form schreibt man: $-0{,}2041200 + (1 - 1) = 0.7958800 - 1 = \log 0{,}625$.

Durch diese Operation hat man also den gemeinen Bruch in einen Dezimalbruch umgewandelt.

Soll für einen negativen Logarithmus die zugehörige Zahl gefunden werden, z. B. für: -1.2041200; so kann man statt dessen schreiben: $0 - 1.20412000$; die entsprechende Zahl ist also ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner eine Zahl ist, deren Logarithmus 1.2041200 ist. Da nun: $1.2041200 = \log 16$; so hat man: $-1.2041200 = \log (\frac{1}{16})$. Man könnte aber auch schreiben: $-1.2041200 + (2 - 2) = 0.7958800 - 2 = \log 0{,}0625$.

§. 78. Bei der Rechnung mit Logarithmen wendet man oft mit Vortheil die dekadische Ergänzung (**Complementum decadicum**) an.

Hat man nemlich: $A + B = 10^n$, (wo n jede ganze Zahl seyn kann); so heißt **A** die dekadische Ergänzung von **B**, und **B** die dekadische Ergänzung von **A**. Man hat also:

$$A = 10^n - B; \text{ und } B = 10^n - A.$$

soll nun eine Zahl von einer andern subtrahirt werden, so addirt man zum Minuend die dekadische Ergänzung des Subtrahends, und zieht von der Summe 10^n ab; denn man hat: $C - A = C - (10^n - B) = (C + B) - 10^n$; der Werth von n läßt sich leicht erkennen.

Da 10^n eine Zahl ist, die mit 1 und n angehängten Nullen geschrieben wird, so erhält man die dekadische Ergänzung einer Zahl, wenn man die letzte (bedeutliche) Ziffer von 10, alle übrigen Zahlen aber von 9 subtrahirt.

Man habe z. B. $\frac{1633}{23}$; so setzen wir:

$x = \frac{1633}{23}$; daher

$\log x = \log 1633 - \log 23$; es ist aber:

$$\begin{array}{lrl} \text{log.}\,1633 & = & 3.2129862 \\ \text{C. d. log}\;\;23 & = & 8.6382722\;(-10) \\ & & \overline{1.8512584} = \log 71 \end{array}$$

Man hat also: $\frac{1633}{23} = 71.$

Anmerk. Potenziren ist die dritte Stufe der direkten Zahlenverbindung; als indirekte Verbindungen dieser Stufe haben wir Radiziren und Logarithmiren.

II. Algebraische Gleichungen.

Erster Abschnitt.

Einfache Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 79. Die Gesetze der möglichen Zahlenverbindungen, so weit sie gewöhnlich, als dem Gebiete der Elemente angehörig betrachtet werden, wurden bisher entwickelt, und in Gleichungen dargestellt, deren Richtigkeit unabhängig von dem speziellen Werthe der allgemeinen Zahlen ist; diese Gleichungen heißen analytische. Wir gehen nun zu den synthetischen oder algebraischen Gleichungen über, in welchen für bestimmte Werthe einiger Zahlen der Werth anderer Zahlen schon gegeben, also, ohne die Richtigkeit der Gleichung aufzuheben, dieser Werth nicht mehr willkührlich ist. (Vergl. Einleitung 6.) Man ist gewohnt, jene Zahl, deren Werth von andern als abhängig, mithin als unbekannt betrachtet wird, mit einem der letzten Buchstaben des Alphabets x, y, z.... zu bezeichnen, während jene Zahlen, die wir als Bekannte oder Gegebene voraussetzen, mit den übrigen Buchstaben bezeichnet werden, mit a, b, c....m, p, q.

Wir betrachten vorerst einfache Gleichungen mit einer Unbekannten, d. h. Gleichungen, in welchen nur eine Unbekannte und zwar in keiner höhern Potenz als der ersten vorkommt.

Die Form einer solchen Gleichung ist:

$$ax + b = c \ldots . (1$$

Nehmen wir an, die Zahlen a, b, c seyen gegeben, so ist der Werth der Unbekannten x von diesen Zahlen so abhängig, daß es nur eine Zahl gibt, die für x gesetzt, die Summe $ax+b$ der Zahl c gleich macht.

Mit Worten würde diese Gleichung so gegeben werden können: Irgend eine Zahl (x) soll mit der Zahl a multiplizirt, und zum Produkte dieser Zahlen die Zahl b addirt werden, so daß die erhaltene Summe der Zahl c gleich sey.

§. 80. Die Unbekannte kann mit den bekannten Zahlen in allen möglichen Verbindungen stehen, die wir früher kennen lernten. Aber um die Unbekannte wirklich als Zahl in ihrer einfachsten Form angeben zu können, muß jede Verbindung der Unbekannten mit Bekannten aufgehoben werden, und bloß eine Verbindung der Bekannten statt finden, so daß durch diese Verbindung die Operationen angegeben sind, die man mit den Bekannten successive ausführen muß, um den Werth der Unbekannten zu erhalten. Hat man dieß ausgeführt, so ist die Gleichung gelöst; und die allgemeine Form einer gelösten Gleichung ist dann:

$$x = A \ldots (2$$

oder: $x - A = o$

x ist die Unbekannte, A aber jede mögliche Verbindung der Bekannten, auf den einfachsten Ausdruck zurückgeführt.

§. 81. Um eine gegebene Gleichung aufzulösen, also auf die Form der Gleichung (2 zu bringen, wenden wir die unter [3], [6], [23] u. s. w. aufgestellten Grundsätze an, indem wir durch Benützung dieser Sätze zuerst die entfernten Verbindungen der Unbekannten mit Bekannten aufheben, und dann erst die nähern. Wollen wir nun die Gleichung (1

$$ax + b = c$$

auflösen. Indem man auf jeder Seite b subtrahirt, erhält man:

$$(ax + b) - b = (c - b); \text{ d. h.}$$

$$ax = c - b.$$

Wir dividiren beiderseits durch a, so hat man:

$$\frac{(ax)}{a} = \frac{c-b}{a}; \text{ d. i.}$$

$$x = \frac{c-b}{a} \dots (3$$

Die Gleichung (3 ist nun die gelöste Gleichung, und würde sich mit Worten so geben lassen: man erhält die unbekannte Zahl x, wenn man von der Zahl c die Zahl b subtrahirt, und die erhaltene Differenz durch die Zahl a dividirt; der Quotient ist dann die gesuchte Zahl x.

Setzen wir den in (3 gefundenen Werth von x in die Gleichung (1, so müssen wir eine identische Gleichung erhalten.

Man hat nemlich

$$a\left(\frac{c-b}{a}\right) + b = c$$

$$(c - b) + b = c$$

$$c = c$$

§. 82 Wie im §. 81. schon bemerkt wurde, sollen bei der Lösung einer Gleichung immer die entferntern Verbindungen der Unbekannten mit Bekannten zuerst aufgehoben werden, und dann die nähern. Im Allgemeinen könnte man folgende Ordnung bei der vorzunehmenden Operation beobachten: Man beginnt mit der direkten Zahlen-Verbindung der höchsten Stufe, geht in der direkten Zahlen-Verbindung zur ersten Stufe zurück, und schreitet dann von der indirekten Zahlen-Verbindung der ersten Stufe in den indirekten Operationen bis zur höchsten Stufe fort. Es ist leicht einzusehen, daß nicht in jeder Gleichung alle diese Operationen nothwendig sind, und daß in speziellen Fällen mit Vortheil von dieser Ordnung abgegangen werden kann.

Um das hier angedeutete Verfahren anschaulich zu machen, bestimme man den Werth von x in folgender Gleichung:

$$a + \sqrt{\left(\frac{x}{m} - c\right)} = \frac{b}{c} \dots (4$$

Weil die Unbekannte im Radikand vorkommt, muß vor Allem die Wurzelgröße allein gestellt werden, indem man beiderseits a subtrahirt; dadurch erhält man:

$$\sqrt{\frac{x}{m} - c} = \frac{b}{c} - a.$$

Potenziret man beiderseits mit 2 (dem Radikator), so ergibt sich

$$\left(\sqrt{\frac{x}{m} - c}\right)^2 = \left(\frac{b}{c} - a\right)^2;$$

$$\frac{x}{m} - c = \frac{b^2}{c^2} - \frac{2ab}{c} + a^2.$$

Multiplizire die Gleichung (alle Glieder der beiden Seiten) mit c^2m, dem gemeinschaftlichen kleinsten Nenner aller Brüche, so erhält man:

$$c^2x - c^3m = b^2m - 2abcm + a^2c^2m.$$

Addire beiderseits c^3m, so ergibt sich:

$$c^2x = b^2m - 2abcm + a^2c^2m + c^3m.$$

Dividire jede Seite der Gleichung durch c^2, so erhält man:

$$x = \frac{b^2m - 2abcm + a^2c^2m + c^3m}{c^2} \ldots\ldots (5$$

Die Gleichung (5 heißt nun in Rücksicht der Gleichung (4 gelöst.

Häufig kann der für die Unbekannte gefundene Werth noch vereinfacht werden; so hat man statt (5:

$$x = m\left(\frac{b^2 - 2abc + a^2c^2 + c^3}{c^2}\right); \text{ oder}$$

$$x = m\left(\frac{b^2 - 2abc}{c^2} + a^2 + c\right).$$

§. 83. Aus den bisher zur Auflösung einer Gleichung angewendeten Gesetzen lassen sich nun folgende Regeln aufstellen:

1. Ein Wurzel-Exponent wird aus einer Gleichung entfernt, wenn man (nach gehöriger Stellung der Glieder) beide Seiten der Gleichung mit demselben potenzirt.

2. Brüche werden aus einer Gleichung entfernt, wenn man mit dem (kleinsten) gemeinschaftlichen Nenner alle Glieder der Gleichung multiplizirt.

3. Jedes Glied einer Gleichung kann man, unbeschadet der Gleichheit der Seiten, auf die andere Seite mit verändertem Zeichen setzen.

4. Der Coëffizient (Faktor) eines Gliedes wird entfernt, wenn man mit diesem Coëffizienten alle Glieder der Gleichung dividirt.

5. Man kann die beiden Seiten einer Gleichung miteinander vertauschen, d. h. in einer Gleichung alle Zeichen der Glieder verändern.

6. Man kann alle Glieder der Gleichung auf eine Seite setzen, d. h. die Gleichung auf Null bringen.

Zur Uebung wollen wir nach diesen Regeln noch einige Gleichungen lösen.

1. $\frac{2x}{3} + \frac{5x}{7} - 1\frac{1}{9}x + \frac{25-x}{2} = 11 - \frac{1\frac{1}{3}x+5}{6} \ldots (6$

Um vorerst die Brüche aus dieser Gleichung zu entfernen, multiplizieren wir alle Glieder mit dem gemeinschaftlichen Nenner aller Brüche, also mit: 2 . 7 . 9, so erhalten wir:

$$84x + 90x - 140x + 1575 - 63x = 1386 - 28x - 105.$$

Wir setzen nun alle Glieder der Gleichung, welche x enthalten, auf die eine, alle andern Glieder auf die andere Seite, so hat man:

$$1575 - 1386 + 105 = 140x + 63x - 28x - 84x - 90x.$$

Wenn man die angezeigten Additionen und Subtraktionen wirklich ausführt, so erhält man:

$$294 = x; \text{ oder}$$
$$x = 294.$$

Setzt man nun 294 statt x in die gegebene Gleichung (6, so erhalten wir, nach gehöriger Reduktion, eine identische Gleichung.

2. $\frac{\frac{ax}{b} - cx}{m} + \frac{x - \frac{x}{p} + 1}{q} = c \ldots (7$

Wir multiplizieren alle Glieder der Gleichung mit: bmpq; so erhält man:

$$apqx - bcpqx + bmpx - bmx + bmp = bcmpq.$$

Wir lassen nun alle x enthaltenden Glieder auf der einen (linken) Seite, und setzen die übrigen Glieder auf die andere Seite, so hat man:

$$apqx - bcpqx + bmpx - bmx = bcmpq - bmp.$$

Wir zerfällen nun die linke Seite in zwei Faktoren, von denen der eine x ist, so ergibt sich:

$$x(apq - bcpq + bmp - bm) = bcmpq - bmp.$$

Dividiren wir nun mit dem Faktor von x, so erhält man mit einigen Reduktionen die gelöste Gleichung:

$$x = \frac{bmp(cq - 1)}{pq(a - bc) + bm(p - 1)}.$$

3. $$\frac{ab}{x} + \frac{1 - \frac{c}{d}}{m} = \frac{c}{x} + 1.$$

Die Operationen, die man successive vornehmen muß, um diese Gleichung zu lösen, stellen sich im Nachfolgenden dar:

$$abdm + dx - cx = cdm + dmx$$
$$abdm - cdm = dmx - dx + cx$$
$$x(dm - d + c) = dm(ab - c)$$
$$x = \frac{dm(ab - c)}{d(m - 1) + c}.$$

Hat man in der Lösung der Gleichungen einmal einige Fertigkeit erworben, so kann man eine nicht zu verwickelte Gleichung, wie

$$ax + b = mx + q$$

sogleich gelöst hinschreiben:

$$x = \frac{q - b}{a - m}.$$

Eben so hat man aus der Gleichung:

$$a + b = (p + x)\frac{m}{c}$$

sogleich: $x = \frac{c(a + b)}{m} - p.$

§. 84. In manchen Fällen würde man, der bisher angedeuteten Ordnung in der Lösung folgend, auf bedeutende Schwierigkeiten stoßen, indem dadurch die Operationen verwickelt und somit die Wahrscheinlichkeit groß würde, einen Rechnungsfehler zu machen; in diesem Falle muß man solche Vereinfachungen

zu machen suchen, die uns am schnellsten und einfachsten zum Ziele führen. Welcher Weg aber hiezu eingeschlagen werden müsse, kann im Allgemeinen nicht angegeben, sondern muß durch Uebung erlernt werden.

Ein Beispiel dieser Art wollen wir hier aus Meier Hirsch, Seite 127, Nro. 39. vornehmen. Die Gleichung heißt:

$$\frac{bx}{2b-a}-\frac{(3bc+ad)x}{2ab(a+b)}-\frac{5ab}{3c-d}=\frac{(3bc-ad)x}{2ab(a-b)}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}$$

Wollte man hier alle Glieder mit dem gemeinschaftlichen Nenner: 2ab (2b — a) (3c — d) (a + b) (a — b) multipliziren, so würde die Operation sehr verwickelt werden. Indem wir nun die x enthaltenden Glieder auf eine Seite stellen, haben wir:

$$x\left(\frac{b}{2b-a}-\frac{3bc+ad}{2ab(a+b)}-\frac{3bc-ad}{2ab(a-b)}\right)=\frac{5ab}{3c-d}-\frac{5a(2b-a)}{a^2-b^2}.$$

Wir bringen nun das zweite und dritte Glied der linken Seite, so wie auch die zwei Glieder der rechten Seite beziehungsweise unter gleiche Nenner, so erhalten wir nach einigen einfachen Reduktionen:

$$x\left(\frac{b}{2b-a}-\frac{3c-d}{(a+b)(a-b)}\right)$$
$$=\frac{5a}{3c-d}\left(\frac{b(a^2-b^2)-(2b-a)(3c-d)}{a^2-b^2}\right).$$

Nun die linke Seite auf gleichen Nenner gebracht, gibt:

$$x\left(\frac{b(a^2-b^2)-(2b-a)(3c-d)}{(2b-a)(a^2-b^2)}\right)$$
$$=\frac{5a}{3c-d}\left(\frac{b(a^2-b^2)-(2b-a)(3c-d)}{a^2-b^2}\right).$$

Dividirt man beiderseits mit dem gemeinschaftlichen Faktor, so erhält man:

$x\left(\frac{1}{2b-a}\right)=\frac{5a}{3c-d}$; und daraus erhält man:

$$x=\frac{5a(2b-a)}{3c-d}.$$

§. 85. Kommt in einer Gleichung die Unbekannte als Exponent vor, so läßt sich eine solche Gleichung nur dadurch lösen,

daß man von Verbindung der Zahlen auf die Verbindung ihrer Logarithmen übergeht, und ist dieß nicht möglich, so kann die Gleichung im elementaren Gebiete nicht gelöst werden.

Man habe:

$$a^{x-1} b = c^x$$

so setzen wir:

$\mathrm{Log}\,(a^{x-1} b) = \log (c^x)$; daher

$(x - 1) \log a + \log b = x \log c$;

$x \log a - \log a + \log b = x \log c$; also

$$x = \frac{\log a - \log b}{\log a - \log c};$$

Zweiter Abschnitt.

Einfache Gleichungen mit mehrern Unbekannten.

§. 86. Die Summe oder Differenz zweier einfachen Gleichungen, deren jede eine andere Unbekannte enthält, gibt eine Gleichung mit zwei Unbekannten. Die Formen zweier solchen Gleichungen sind bekanntlich:

$$ax + b = c$$
$$a_{,}y + b_{,} = c_{,}$$

Daraus erhält man: $ax + a_{,}y + (b + b_{,}) = (c + c_{,})$ oder vereinfacht:

$$ax + a_{,}y + p = q.$$

Wollte man nun aus einer solchen Gleichung die Unbekannten x und y finden, so müßten wir die Gleichung wieder in zwei zerlegen. Da aber diese Zerlegung höchst mannigfaltig seyn kann, so sind auch für x und y viele Werthe möglich, die den Bedingungen der Gleichung entsprechen, und beziehungsweise hypothetisch sind.

Um also für x und y bestimmte Werthe angeben zu können, ist noch eine zweite Gleichung nothwendig; überhaupt sind so viele, gegenseitig unabhängige, Gleichungen nothwendig, als man Unbekannte zu bestimmen hat.

Die allgemeine Form dieser Gleichungen ist daher:

$$ax + by = c \; .... (1$$
$$a_{,}x + b_{,}y = c_{,} \; .... (2$$

§. 87. Die Auflösung der Gleichungen mit mehrern Unbekannten besteht im Allgemeinen darin, daß man nach den Gesetzen der Zahlen-Verbindungen alle Unbekannten aus den Gleichungen entfernt, bis auf eine Unbekannte; dadurch reduzirt man diese Gleichungen auf Gleichungen mit einer Unbekannten, deren Auflösung wir bereits kennen. Hat man einmal den Werth einer Unbekannten gefunden, so ergibt sich der Werth der übrigen leicht.

§. 88. Je nachdem wir zur Entfernung (Elimination) der Unbekannten einen andern Grundsatz anwenden, pflegt man dieser Elimination auch andere Namen beizulegen. Man kann nemlich folgende Eliminations-Methoden anwenden:

1. Substitution, nach dem Gesetze: Gleiches für Gleiches gesetzt, gibt Gleiches. Man löst die eine Gleichung für eine Unbekannte auf, und setzt ihren so gefundenen Werth in die andere Gleichung.

Wollen wir nun aus den Gleichungen (1, (2 den Werth für y finden, so lösen wir die Gleichung (1 für x auf, wodurch wir erhalten:

$$x = \frac{c - by}{a} \; .... (3$$

Der in (3 gefundene Werth von x wird in die Gleichung (2 statt x gesetzt; dann hat man:

$$a_{,}\left(\frac{c - by}{a}\right) + b_{,}y = c_{,} \; .... (4$$

Wir haben nun eine Gleichung (4, in welcher nur noch die Unbekannte y vorkommt; daraus erhält man nun:

$$y = \frac{ac_{,} - a_{,}c}{ab_{,} - a_{,}b} = \frac{a_{,}c - ac_{,}}{a_{,}b - ab_{,}} \; .... (5$$

Der Werth von y ist also gefunden; um nun auch den Werth von x zu finden, setzen wir in die Gleichung (3 statt y dessen Werth in (5; dadurch hat man:

$$x = \frac{c - b\left(\frac{ac_, - a_,c}{ab_, - a_,b}\right)}{a}$$; und nach gehöriger Vereinfachung ergibt sich:

$$x = \frac{b_,c - bc_,}{ab_, - a_,b} = \frac{bc_, - b_,c}{a_,b - ab_,}$$

Untersuchung der Fälle, in welchen x oder y positiv oder negativ wird.

2. Comparation, nach dem Gesetze: zwei Größen, die einer dritten gleich sind, sind auch unter sich gleich.

Man löst beide Gleichungen für die nemliche Unbekannte auf, und stellt die erhaltenen Werthe als neue Gleichungen zusammen.

Wollen wir aus den Gleichungen (1, (2 den Werth von x finden, so lösen wir beide Gleichungen nach y, und erhalten:

$$y = \frac{c - ax}{b} \quad \ldots . (6$$

$$y = \frac{c_, - a_,x}{b_,} \quad \ldots . (7$$

Daraus erhalten wir die Gleichung mit einer Unbekannten:

$$\frac{c - ax}{b} = \frac{c_, - a_,x}{b_,}$$; also

$$x = \frac{bc_, - b_,c}{a_,b - ab_,}.$$

Den so eben erhaltenen Werth von x in die Gleichung (6 oder (7 gesetzt, gibt uns nach gehöriger Reduktion den Werth von y.

Wir könnten aber auch die Gleichungen (1, (2 nach x lösen, die erhaltenen Werthe zusammenstellen, und so y finden.

3. Elimination (im engern Sinne) nach dem Gesetze Gleiches zu Gleichem addirt, gibt Gleiches; Gleiches von Gleichem subtrahirt, gibt Gleiches.

Wir bringen die Gleichungen auf die Form von (1 und (2, wenn sie dieselbe noch nicht haben; hat nun die zu eliminirende Unbekannte in beiden Gleichungen denselben Coëffizienten, so

darf man nur beide Gleichungen addiren oder subtrahiren, je nachdem die zu eliminirenden Glieder ungleiche oder gleiche Vorzeichen haben. Haben die zu eliminirenden Glieder nicht gleiche Coëffizienten, so macht man sie gleich; man multiplizirt nemlich die Gleichung (1 mit dem Coëffizienten, den die zu eliminirende Unbekannte in der Gleichung (2 hat; und umgekehrt: die Gleichung (2 mit dem Coëffizienten, den die zu eliminirende Unbekannte in der Gleichung (1 hat. Haben beide Coëffizienten einen gemeinschaftlichen Faktor, so kann man bei der Multiplikation diesen Faktor weglassen.

Wir multiplizıren, um x zu eliminiren, also y zu finden, die Gleichung (1 mit a, und die Gleichung (2 mit a, so erhält man:

$$aa_{,}x + a_{,}by = a_{,}c \;.\;.\;.\;.\; (8$$
$$aa_{,}x + ab_{,}y = ac_{,} \;.\;.\;.\;.\; (9$$

Subtrahiren wir nun die Gleichung (9 von Gleichung (8, so erhalten wir:

$$y\,(a_{,}b - ab_{,}) = a_{,}c - ac_{,}; \text{ daher}$$
$$y = \frac{a_{,}c - ac_{,}}{a_{,}b - ab_{,}}.$$

Den Werth von x würden wir finden, wenn wir aus den Gleichungen (1 und (2 y eliminirten; zu diesem Ende multiplizirt man die Gleichung (1 mit b,; die Gleichung (2 mit b; dann werden beide Gleichungen subtrahirt, und die gefundene Gleichung für x gelöst. x hätte man auch durch Substitution finden können.

4. Eine vierte (französische) Eliminationsmethode nach dem Gesetze: ein Produkt wird Null, wenn ein Faktor desselben Null wird.

Man multiplizirt die eine Gleichung mit einer willkührlichen allgemeinen Zahl; addirt zu der erhaltenen Gleichung die andere, und ordnet sie nun nach (1. Will man nun x eliminiren, so setzt man den Coëffizienten von x gleich Null, und bestimmt aus dieser Gleichung den Werth der willkührlichen Größe, (um zu finden, unter welcher Bedingung der Coëffizient

Null wird). Diesen Werth der willkührlichen Größe substituirt man dann in die Gleichung, und reduzirt gehörig, so erhält man den Werth einer Unbekannten.

Will man die Gleichungen (1 und (2 nach dieser Methode auflösen, so multiplizirt man die Gleichung (1 mit der willkührlichen Zahl m, so erhält man:

$$amx + bmy = cm \; .... (10$$

Addirt man nun die Gleichungen (10 und (2, so erhält man:

$$x(a, + am) + y(b, + bm) = cm + c, \; .... (11$$

Wollen wir nun aus der Gleichung (11 den Werth von x suchen, so setzen wir den Coëffizienten von y gleich Null; man hat also:

$$b, + bm = 0; \text{ also}$$

$$m = -\frac{b,}{b}.$$

Setzen wir nun in der Gleichung (11 statt der willkührlichen Zahl m den Werth: $-\frac{b,}{b}$, so erhält man:

$$x\left(a, - a \cdot \frac{b,}{b}\right) = -c \cdot \frac{b,}{b} + c,; \text{ daraus ergibt}$$

sich: $x = \frac{bc, - b,c}{a,b - ab,}$.

Setzen wir in der Gleichung (11 den Coëffizienten von x gleich Null, also: $a, + am = 0$; d. h. $m = -\frac{a,}{a}$; und substituirt diesen Werth in (11 so erhält man den Werth von y.

§. 89. Auf welche der vier hier angegebenen Arten man auch Gleichungen mit zwei Unbekannten lösen mag, immer wird man zum Ziele gelangen, und es wird gut seyn, wenn man sich in allen Arten übt; frägt es sich aber, durch welche Methode man am schnellsten und sichersten die Auflösung erhält, so dürfte im Allgemeinen die dritte, nemlich Elimination (im engern Sinne, auch englische Methode genannt,) die beste seyn, weil man bei dieser die Verbindungen der Zahlen am leichtesten überschauen,

und überdieß in speziellen Fällen das Multipliziren mit großen Zahlen manchmal umgehen kann. Man habe z. B.

$$19x + 31y = 474 \; .... \; (A$$

$$18x + 27y = 423 \; .... \; (B$$

Um diese Gleichungen aufzulösen, eliminiren wir x, und suchen also zuerst den Werth von y; aber wir können durch einen Umweg bequem zur Lösung kommen; wir subtrahiren (B von (A, so erhält man:

$$x + 4y = 51 \; .... \; (C$$

Wir multipliziren nun (C mit 18, so erhält man:

$$18x + 72y = 918 \; .... \; (D$$

Nun subtrahiren wir (B von (D, so hat man:

$$45y = 495; \text{ also}$$

$$y = \frac{495}{45} = 11.$$

Diesen Werth von $y = 11$ in (C substituirt, gibt:

$$x = 7.$$

Wo solche Abkürzungen angewandt werden können, läßt sich in speziellen Fällen bei einiger Aufmerksamkeit leicht erkennen.

Für Gleichungen, in welchen sich die Werthe der Unbekannten als bestimmte Zahlen ergeben, ist zu merken, daß, wenn man einmal den Werth für eine Unbekannte durch eine beliebige Methode gefunden hat, die Werthe der übrigen durch Substitution am schnellsten gefunden werden.

§. 90. Noch sollen besonders jene Gleichungen mit mehrern Unbekannten betrachtet werden, in welchen die Unbekannten als Nenner von Brüchen vorkommen; d. h. Gleichungen von der Form:

$$\frac{a}{x} + \frac{b}{y} = c \; .... \; (E$$

$$\frac{a,}{x} + \frac{b,}{y} = c, \; .... \; (F$$

Solche Gleichungen lassen sich allerdings auf gewöhnlichem Wege lösen, aber am leichtesten kommt man zum Resultate, wenn

man statt der Unbekannten ihre reciproken Werthe sucht, d. i., wenn man setzt:

$$\frac{1}{x} = x,$$

$$\frac{1}{y} = y,$$

Dadurch verwandeln sich die Gleichungen (E und (F beziehungsweise in folgende:

$$ax, + by, = c$$

$$a,x, + b,y, = c,$$

Aus diesen Gleichungen findet man:

$$x, = \frac{b,c - bc,}{ab, - a,b}$$

$$y, = \frac{a,c - ac,}{a,b - ab,}$$

Folglich hat man durch gehörige Substitution:

$$x = \frac{ab, - a,b}{b,c - bc,}$$

$$y = \frac{a,b - ab,}{a,c - ac,}$$

§. 91. Sind Gleichungen mit drei oder mehr Unbekannten gegeben, so lassen sie sich ebenfalls nach den im §. 88. auseinandergesetzten Methoden auflösen, wenn nur so viele, von einander unabhängige, Gleichungen gegeben sind, als man Unbekannte hat. Hat man aus n gegebenen Gleichungen n Unbekannte zu bestimmen, so eliminirt man aus allen Gleichungen eine Unbekannte: man erhält dann (n — 1) Gleichungen für (n — 1) Unbekannte; durch fernere Elimination einer Unbekannten erhält man (n — 2) Gleichungen für (n — 2) Unbekannte, und fährt so fort, bis man zuletzt noch eine Gleichung mit einer Unbekannten hat, deren Werth dann leicht gefunden wird. Die übrigen Werthe erhält man dann durch Substitution.

Es sollen einige Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten hier gelöst werden:

1. $\frac{x+1}{4} + \frac{y-1}{5} = \frac{z-1}{4}$ .... (A

$$\frac{x+3}{5} + \frac{z+1}{3} = \frac{y+1}{4} + 5 \ldots. \text{ (B}$$

$$\frac{x+y}{3} - \frac{z-5}{4} = 3 \quad \ldots. \text{ (C}$$

Um die Brüche zu entfernen, multipliziren wir die Gleichungen (A, (B, (C, beziehungsweise mit 20, 60, 12, und erhalten nach einigen leichten Reduktionen:

$$5x + 4y - 5z = -6 \ldots. \text{ (D}$$

$$12x - 15y + 20z = 259 \ldots. \text{ (E}$$

$$4x + 4y - 3z = 21 \quad \ldots. \text{ (F}$$

Wir subtrahiren nun (D von (F, so erhält man:

$$2z - x = 27 \ldots. \text{ (G}$$

Wir multipliziren (D mit 15 und (E mit 4, und addiren dann die so erhaltenen Gleichungen, so ergibt sich:

$$123x + 5z = 946 \ldots. \text{ (H}$$

Ferner multipliziren wir (G mit 5, und (H mit 2, und subtrahiren die erstere dieser Gleichungen von der zweiten, so ergibt sich:

$$x = 7.$$

Diesen Werth substituirt in (G, gibt:

$$z = 17.$$

Endlich die Werthe für x und z substituirt in (F, erhalten wir:

$$y = 11.$$

2. $53 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}z = y - 109$

$$\frac{1}{4}x + \frac{1}{8}y = 26$$

$$5y = 4z.$$

Wenn wir in diesen Gleichungen die Brüche wegschaffen, und gehörig ordnen, erhalten wir:

$$x + 2y + z = 324 \ldots. \text{ (K}$$

$$2x + y = 208 \ldots. \text{ (L}$$

$$5y = 4z \quad \ldots. \text{ (M}$$

Den Werth für z aus (M: $z = \frac{5y}{4}$ substituiren wir in (K

so haben wir:

$$4x + 13y = 1296 \ldots\ldots (N$$

Die Gleichung (L mit 2 multiplizirt und dann von (N subtrahirt, gibt:

$$11y = 880;$$ daher

$y = 80$; $z = 100$; $x = 64$.

3. $$\frac{xy}{3y+4x} = \frac{10}{13}$$

$$\frac{yz}{5z+6y} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{xz}{2z+7x} = \frac{24}{29}.$$

Durch Wegschaffen der Brüche erhalten wir nach der Reihe:

$$13xy = 30y + 40x$$

$$7yz = 20z + 24y$$

$$29xz = 48z + 168x$$

Dividiren wir diese drei vorstehenden Gleichungen nach der Reihe durch xy, yz, xz, so hat man:

$$13 = \frac{30}{x} + \frac{40}{y}$$

$$7 = \frac{20}{y} + \frac{24}{z}$$

$$29 = \frac{48}{x} + \frac{168}{z}.$$

Aus diesen drei Gleichungen erhalten wir nach §. 90:

$$30x, + 40y, = 13 \ldots. (A$$

$$20y, + 24z, = 7 \ldots. (B$$

$$48x, + 168z, = 29 \ldots. (C$$

Wir multipliziren (B mit 2, und davon dann subtrahiren wir (A; dieß gibt:

$$48z, - 30x, = 1 \ldots. (D$$

Nun multiplizirt man (C mit 5, (D mit 8, so hat man, wenn man die erhaltenen Gleichungen addirt:

$$1224z, = 153;$$ also

$$z, = \frac{153}{1224} = \frac{1}{8};$$ mithin $z = 8$

aus (D erhält man: $x, = \frac{1}{6}$ also $x = 6$

aus (B : $y, = \frac{1}{5}$; daher $y = 5$.

4. $2x + y + z = 12$ .... (A
$3x + 2y - u = 5$ .... (B
$5x - z + 3u = 28$ .... (C
$3y + 4z - 2u = 11$ .... (D

Dadurch, daß wir (A und (C addiren, eben so die mit 4 multiplizirte Gleichung (C zu (D addiren, erhalten wir:

$7x + y + 3u = 40$ .... (E
$20x + 3y + 10u = 123$ .... (F

Die mit 3 multiplizirte Gleichung (B addiren wir zu (E; dann die mit 10 multiplizirte Gleichung (B addiren wir zu (F, so erhält man:

$16x + 7y = 55$ .... (G
$50x + 23y = 173$ .... (H

Nun 3×(G von (H subtrahirt, gibt
$2x + 2y = 8$ .... K

Endlich (G von 8×(K subtrahirt, gibt;
$9y = 9$; daher: $y = 1$.

Also: $x = 3$; $u = 6$; $z = 5$.

Anhang zum zweiten Abschnitte.

Unbestimmte Gleichungen.

§. 92. Sollen wir aus der Gleichung:

$$ax + by = c$$

beide Unbekannte finden, ohne daß noch eine zweite Gleichung gegeben ist, so hat man, wenn man x bestimmen will:

$$x = \frac{c - by}{a}.$$

Da nun auch der Werth von y nicht gegeben ist, so nimmt man y willkührlich, und es wird jedem besondern Werthe von y ein besonderer Werth von x entsprechen; würde man nun für y jeden ganzen oder gebrochenen, positiven oder negativen Werth

nehmen, so würde man für x unendlich viele Werthe finden; dasselbe gilt für y, wenn wir für x willkührliche Werthe annehmen.

Gleichungen von dieser Form, oder überhaupt Gleichungen, aus welchen mehr Unbekannte gefunden werden sollen, als Gleichungen gegeben sind, heißen unbestimmte (diophantische Aufgaben.)

§. 93. Bei der Auflösung unbestimmter Gleichungen schließen wir alle gebrochenen und negativen Werthe der Unbekannten, so wie auch Null, aus, und suchen bloß die Bedingungen, unter welchen die Gleichung für ganze, positive Zahlen lösbar sey; es ergeben sich dabei folgende Fälle:

a) Ist die unbestimmte Gleichung von der Form:

$$ax + by = c$$

wo uns a, b, c ganze positive Zahlen bedeuten, so gibt es für x und y nur einen oder einige, zwischen bestimmten Grenzen enthaltene Werthe, welche der Gleichung genügen.

b) Ist die Gleichung von der Form:

$$ax - by = c$$

wo uns a, b, c wieder ganze positive Zahlen bedeuten, so sind für x und y unendlich viele Werthe möglich, welche die Gleichung lösen.

Beide Fälle finden natürlich nur dann statt, wenn die Gleichung überhaupt für ganze positive Werthe von x, und y lösbar ist.

Denn es sey: $6x \pm 9y = 1000$ gegeben; so ist, welche ganze Zahlen wir auch für x und y setzen mögen, die Summe oder Differenz: $6x \pm 9y$ immer durch 3 ohne Rest theilbar; die Zahl 1000 aber ist durch 3 nicht theilbar; daher diese Gleichung nicht lösbar, wenn für x und y nur ganze Zahlen gesetzt werden dürfen.

Wir wollen nun einige Gleichungen der Art lösen.

1. Sey gegeben:

$$17x + 23y = 292 \ldots (A$$

Ist diese Gleichung überhaupt lösbar, so werden wir für x und y nur einen oder nur einige Werthe finden, die den in

der Gleichung ausgedrückten Forderungen entsprechen. Der kleinste Werth, der für x oder y statt finden kann, ist 1; setzen wir nun $x=1$, so kann $y=11$ höchstens seyn; daher die Werthe für y zwischen 1 und 11 liegen.

Setzen wir $y=1$, so ist 15 der höchste Werth für x; die möglichen Werthe für x liegen also zwischen 1 und 15. Um nun die Werthe zu finden, lösen wir, da $17 < 23$, die Gleichung für x; daher

$$x=\frac{292-23y}{17} \dots \text{(B}$$

Da nun x eine ganze Zahl seyn soll, so muß auch dessen Aequivalent: $\frac{292-23y}{17}$ eine ganze Zahl seyn; wir dividiren nun mit 17, so erhalten wir:

$$x=17-y+\frac{3-6y}{17}$$

Hier sind nun 17 und y offenbar ganze Zahlen; daher muß auch der Bruch: $\frac{3-6y}{17}$ eine ganze Zahl seyn. Wir nehmen nun a als ganze Zahl, und setzen:

$$\frac{3-6y}{17}=a;\ \text{daher}$$

$$y=\frac{3-17a}{6}=-2a+\frac{3-5a}{6} \dots \text{(C}$$

Der Bruch: $\frac{3-5a}{6}$ muß wieder eine ganze Zahl seyn; daher setzen wir:

$$\frac{3-5a}{6}=b;\ \text{mithin}$$

$$a=\frac{3-6b}{5}=-b+\frac{3-b}{5} \dots \text{(D}$$

Damit a eine ganze Zahl werde, muß auch; $\frac{3-b}{5}$ eine ganze Zahl seyn; wir setzen also:

$$\frac{3-b}{5}=c\text{; also:}$$

$$b=3-5c\ldots\text{ (E}$$

Nun haben wir b unter der Form einer ganzen Zahl; substituiren wir nun den Werth von b aus (E in (D so erhalten wir:

$$a=6c-3$$

Dieser Werth von a in (C substituirt, gibt die Bedingungsgleichungen:

$$y=9-17c\text{; und daraus:}$$

$$x=5+23c.$$

Der Werth von c ist im Allgemeinen willkührlich, positiv, negativ oder Null; aber er muß so gewählt werden, daß x und y positiv werden; in unserm speziellen Falle sehen wir nun leicht, daß die einzige Lösung möglich ist, wenn wir $c=0$ setzen; dann wird:

$$y=9\text{; }x=5$$

wir erhalten also:

$$5.17+9.23=292.$$

2. Man habe ferner die Gleichung:

$$9x-16y=69\text{; so erhalten wir:}$$

$$x=\frac{69+16y}{9}=7+y+\frac{6+7y}{9}$$

Wir setzen: $\frac{6+7y}{9}=a$; so erhält man:

$$y=\frac{9a-6}{7}=a+\frac{2a-6}{7}.$$

Wir setzen wieder: $\frac{2a-6}{7}=b$; so folgt daraus:

$$a=\frac{7b+6}{2}=3b+3+\frac{1}{2}b$$

Endlich sey $\frac{1}{2}b=c$ so erhält man: $b=2c$; folglich:

$$a=7c+3\text{; mithin}$$

$$y=9c+3\text{; und}$$

$$x=16c+13$$

Einen negativen Werth können wir für die Zahl c nicht setzen; denn dann würde x negativ, so wie auch y; setzen wir aber für c die Werthe: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6.... so erhalten wir beziehungsweise die Werthe für y: 3, 12, 21, 30, 39, 48...., und für x die Werthe: 13, 29, 45, 61....

Es gibt also unendlich viele Werthe für x und y, die den Bedingungen der Gleichung entsprechen. Es ist übrigens leicht zu bemerken, daß zwischen den Werthen von y die beständige Differenz 9 statt finde; (9 ist aber in der gegebenen Gleichung Faktor von x) eben so differiren die auf einander folgenden Werthe von x um 16 (den Faktor von y).

3. Endlich habe man die Gleichung:

$$11x + 19y = 61; \text{ so folgt:}$$

$$x = \frac{61 - 19y}{11} = 5 - y + \frac{6 - 8y}{11}.$$

Wir setzen: $\frac{6 - 8y}{11} = a$; so ist:

$$y = -\frac{6 - 11a}{8} = -a + \frac{6 - 3a}{8}.$$

Setzt man: $\frac{6 - 3a}{8} = b$; so ergibt sich:

$$a = \frac{6 - 8b}{3} = 2 - 2b - \frac{2b}{3}$$

Wenn: $c = \frac{2b}{3}$; so ist $b = \frac{3c}{2} = c + \frac{1}{2}c$;

endlich, wenn $\frac{1}{2}c = d$ gesetzt wird, erhält man: $c = 2d$. Daraus folgt nun:

$$b = 3d;$$
$$a = 2 - 8d;$$
$$y = 11d - 2; \text{ und}$$
$$x = 9 - 19d.$$

Die Werthe für y und x enthalten nun die Bedingungen der Lösbarkeit der Gleichung; aber wir mögen für d eine beliebige positive oder negative ganze Zahl, oder Null setzen, immer

werden wir für x oder y negative Werthe erhalten; daher die gegebene Gleichung unter der Voraussetzung, daß für x und y nur ganze positive Zahlen gesetzt werden dürfen, nicht lösbar.

Anmerk. Sind n unbekannte Zahlen aus $(n-1)$ Gleichungen zu bestimmen, so eliminirt man nach den bekannten Gesetzen alle Unbekannten bis auf zwei; dann erhalten wir immer eine Gleichung von der Form: $ax \pm by = c$, aus der wir nach dem auseinandergesetzten Verfahren die Bedingungen der Lösbarkeit finden können.

Sollen aus einer Gleichung drei Unbekannte gefunden werden, so nimmt man vorläufig eine der Unbekannten beliebig, und löst dann die Gleichung für die beiden andern.

Dritter Abschnitt.

Gleichung zweier Differenzen und zweier Quotienten.

§. 94. Eine besondere Berücksichtigung verdient die Gleichung zweier Differenzen, und die zweier Quotienten; die erstere ist allgemein unter der Form:

$$a - b = c - d \ldots. \text{(A}$$

enthalten, und wird arithmetische Proportion genannt.

Die Gleichung zweier Quotienten: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, die aber gewöhnlich unter der Form:

$$a : b = c : d \ldots. \text{(B}$$

vorkommt, heißt geometrische Proportion. Gelesen wird: a verhält sich (arithmetisch oder geometrisch) zu b, wie c zu d.

Jede Seite einer solchen Gleichung heißt ein (arithmetisches oder geometrisches) Verhältniß. Die Proportion besteht aus vier Gliedern; das erste und vierte (a und d) heißen äußere Glieder; das zweite und dritte (b und c) heißen mittlere (innere) Glieder. Das erste und dritte Glied (a und c) heißen wohl auch Vorderglieder, so wie das zweite und vierte (b und d) Hinterglieder genannt werden. Je zwei Vorder- oder zwei Hinterglieder heißen homolog.

Wir untersuchen zuerst die Gesetze der arithmetischen, dann die der geometrischen Proportion.

§. 95. 1. Aus der Gleichung (A folgt unmittelbar:

$$a + d = b + c \ldots. \text{ (C}$$

d. h. in jeder arithmetischen Proportion ist die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder. (Hauptsatz für arithmetische Proportionen.)

Eben so folgt aus (A oder (C:

$$d = (b + c) - a: \text{ und}$$

$$c = (a + d) - b$$

d. h. man erhält ein äußeres Glied einer arithmetischen Proportion, wenn man von der Summe der beiden mittlern Glieder das andere äußere subtrahirt; ebenso erhält man ein mittleres Glied, wenn man von der Summe der beiden äußern Glieder das andere mittlere subtrahirt.

Anmerk. d heißt die vierte arithmetische Proportionalzahl zu a, b, c.

2. Ist die Gleichung (C gegeben, so folgt unmittelbar die Gleichung (A daraus; d. h.

Wenn die Summe zweier Zahlen gleich ist der Summe zweier andern Zahlen, so bilden diese Zahlen eine arithmetische Proportion, wenn man die einen Summanden zu äußern, die andern Summanden zu mittlern Gliedern macht. Die Stellung der Glieder kann dabei mannigfaltig seyn.

3. Sind in einer arithmetischen Proportion die mittlern (oder äußern) Glieder einander gleich, so heißt die Proportion stetig (außerdem diskret); z. B.

$$a - b = b - c; \text{ oder}$$

$$a - b - c \ldots. \text{ (D}$$

In diesem Falle heißt b die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu den Zahlen a und c, so wie c die dritte arithmetische Proportionalzahl zu a und b heißt.

Da nach 1. aus (D folgt:

$$b = \frac{a + c}{2}$$

so erhält man die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu zwei Zahlen, wenn man die Summe dieser zwei Zahlen durch 2 dividirt; und umgekehrt: ist das doppelte einer Zahl gleich der Summe zweier andern Zahlen, so ist erstere Zahl die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu den beiden andern.

Anmerk. Man erhält zu mehrern gegebenen Zahlen die mittlere arithmetische Proportionalzahl, wenn man ihre Summe durch ihre Anzahl dividirt.

§. 96. 1. Aus der Gleichung (B. folgt unmittelbar:

$$ad = bc \ldots. \text{ (E}$$

d. h. in jeder geometrischen Proportion ist das Produkt der äußern Glieder gleich dem Produkte der mittlern Glieder. (Hauptsatz für geometrische Proportionen.)

Anmerk. Unter Proportion ohne Beisatz verstehen wir in Zukunft immer geometrische.

2. Aus (E folgt unmittelbar:

$$d = \frac{bc}{a}; \text{ und}$$

$$c = \frac{ad}{b}$$

d. h. man erhält ein äußeres Glied einer Proportion, wenn man das Produkt der mittlern Glieder durch das andere äußere dividirt; eben so findet man ein mittleres Glied, wenn man das Produkt der äußern Glieder durch das andere mittlere dividirt.

Zus. 1. Sind in zwei Proportionen drei Glieder der Ordnung nach gleich; so sind auch die vierten gleich.

Zus. 2. Ist in der Gleichung (B: $a = c$; so ist auch $b = d$; ist $a \gtrless c$, so ist $b \gtrless d$; ist $a = b$, so ist: $c = d$ u. s. w.

3. Aus der Gleichung (E folgt unmittelbar die Gleichung (B, d. h. wenn das Produkt zweier Zahlen gleich dem Produkte zweier andern Zahlen ist, so bilden diese Zahlen eine Proportion, wenn man die Faktoren des einen Produktes zu äußern, und die Faktoren des anderen Produktes zu mittlern Gliedern macht. Die Stellung der Glieder kann aber folgendermassen seyn:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a : c = b : d \\ d : b = c : a \\ d : c = b : a \end{array}\right\} \text{permutando}$$

$$c : d = a : b \quad \text{invertendo}$$

$$\left.\begin{array}{l} b : d = a : c \\ c : a = d : b \\ b : a = d : c \end{array}\right\} \text{permutando}$$

Aus jeder dieser Proportionen hat man $ad = bc$; ist also die erste richtig, so sind die übrigen 7 ebenfalls richtig. Man kann daher jede Proportion unter acht verschiedenen Stellungen der Glieder geben, wenn man die mittlern, und die äußern Glieder, und die Verhältnisse vertauscht.

4. Hat man die Proportion:

$a : b = c : d \ldots$ (B

oder nach 3. $a : c = b : d \ldots$ (F, so folgt:

$$ad = bc.$$

Addirt (oder subtrahirt) man zu jedem dieser gleichen Produkte das Produkt zweier homologen Glieder, etwa bd, so hat man:

$$ad \pm bd = bc \pm bd, \text{ oder}$$

$d\,(a \pm b) = b(c \pm d)$; daraus erhält man nach 3,

$$a \pm b : c \pm d = b : d = a : c \ldots (G$$

Daraus folgt nun nach der Proportion (B: in jeder Proportion verhält sich die Summe (oder Differenz) der Glieder des ersten Verhältnisses zur Summe (oder Differenz) der Glieder des zweiten Verhältnisses, wie sich zwei homologe Glieder verhalten; oder nach der Proportion (F gelesen: es verhält sich die Summe (Differenz) der Vorderglieder zur Summe (Differenz) der Hinterglieder, wie sich die Glieder eines Verhältnisses verhalten.

Aus der Proportion (G folgt dann noch:

$$a + b : c + d = a - b : c - d$$

Zus. Sind mehrere gleiche Verhältnisse gegeben, so ver-

hält sich die Summe aller Vorderglieder zur Summe aller Hinterglieder, wie sich verhalten die Glieder eines Verhältnisses.

5. Eine Proportion wird nicht geändert, wenn man (α alle Glieder oder β) die Glieder eines Verhältnisses, oder γ) zwei homologe Glieder mit der nemlichen Zahl multiplizirt oder dividirt; d. i. wenn die Proportion:

$$a : b = c : d$$

gegeben ist, so folgt die Richtigkeit der folgenden:

$$am : bm = cm : dm$$

$$a : bx = c : dx$$

$$\frac{a}{q} : \frac{b}{q} = c : d \text{ u. s. f.}$$

Denn es ist: $ad = bc$; also auch $ad . m . m = bc . m . m$: oder $am . dm = bm . cm$; daher nach 3.

$$am : bm = cm : dm$$

und so läßt sich der Beweis für alle folgenden Proportionen geben.

Zus. Nach (β kann man das Verhältniß von Brüchen auf das Verhältniß von ganzen Zahlen, und dieß auf das Verhältniß von Primzahlen zurückführen; denn es sey:

$$a : b = 2\frac{2}{7} : 4\frac{4}{5}; \text{ so ist}$$

$$a : b = \frac{16}{7} : \frac{24}{5}.$$

Multiplizirt man die Glieder des zweiten Verhältnisses mit 35, so erhält man:

$$a : b = 16 . 5 : 24 . 7$$

Dividiren wir die Glieder des zweiten Verhältnisses durch 8, so hat man;

$$a : b = 10 : 21; \text{ daher}$$

$$2\frac{2}{7} : 4\frac{4}{5} = 10 : 21$$

Aus diesem Verfahren ergibt sich der Satz: Brüche mit gleichem Nennern verhalten sich wie ihre Zähler; und mit gleichen Zählern, wie ihre Nenner umgekehrt.

Anmerk. Da Irrationalzahlen sich als Brüche betrachten lassen, so läßt sich das Verhältniß von Irrationalzahlen auf das Verhältniß ganzer Zahlen zurückführen.

6. Eine Proportion wird nicht geändert, wenn man alle Glieder mit der nemlichen Zahl potenzirt, oder durch die nemliche Zahl radizirt; d. i. wenn:

$$a : b = c : d; \text{ so ist auch;}$$
$$a^m : b^m = c^m : d^m, \text{ und}$$
$$\sqrt[m]{a} : \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{c} : \sqrt[m]{d}$$

Denn es ist: $ad = bc$; daher $(ad)^m = (bc)^m$; oder $a^m . d^m = b^m . c^m$; daher

$$a^m : b^m = c^m : d^m \text{ u. s. w.}$$

7. Aus zwei oder mehrern Proportionen erhält man eine neue Proportion, wenn man die Glieder der Proportionen nach der Reihe miteinander multiplizirt; d. i. wenn:

$$a : b = c : d$$
$$a_1 : b_1 = c_1 : d_1$$
$$a_2 : b_2 = c_2 : d_2 \text{ u. s. f. so folgt:}$$
$$aa_1 a_2 : bb_1 b_2 = cc_1 c_2 : dd_1 d_2 \ldots. (H$$

Die Proportion (H heißt nun eine zusammengesetzte.

Sind nun zwei oder mehrere Proportionen von der Art gegeben, daß immer je ein Glied der einen Proportion einem Gliede der andern Proportion gleich ist; so lassen sich die Glieder der Proportionen nach 3 so stellen; daß das gleiche Glied in der einen ein äußeres, und in der andern ein mittleres Glied wird; multiplizirt man nun die Glieder der Proportionen, und dividirt durch das gleiche Glied, so erhält man eine neue Proportion. Ist z. B. gegeben:

$$\left.\begin{array}{l} a : b = c : d \\ a_1 : a = c_1 : c \end{array}\right\} \ldots. (K$$

so erhält man:

$$aa_1 : ab = cc_1 : cd; \text{ daher:}$$
$$a_1 : b = c_1 : d \ldots. (L$$

Man leitet nun, ohne die Multiplikation wirklich vorzuneh-

men, aus den Proportionen (K die Proportion (L unmittelbar ab. Die Stellung der Glieder kann dabei mannigfaltig seyn.

Gewöhnlich gibt man mehreren Proportionen dieser Art folgende Form (Kettensatz):

$$a : b = c : x$$
$$a_1 : b_1 = x : y$$
$$a_2 : b_2 = y : z$$
$$a_3 : b_3 = z : m$$

Daraus folgt nun unmittelbar:

$$aa_1a_2a_3 : bb_1b_2b_3 = c : m$$

Hätte man überdieß noch: $a = a_1 = a_2 = a_3$, und $b = b_1 = b_2 = b$, so würde die vorstehende Proportion in folgende übergehen:

$$a^4 : b^4 = c : m$$

8. Sind in einer Proportion die mittlern (oder die äußern) Glieder einander gleich, so heißt die Proportion **stetig**; allgemein heißt eine solche Proportion:

$$a : b = b : c \text{ oder}$$
$$a : b : c \ldots. (M$$

Aus 1 folgt:

$$b^2 = ac; \text{ daher}$$
$$b = \sqrt{ac} \ldots. (N$$

d. h. **in einer stetigen Proportion ist das Quadrat des mittlern Gliedes gleich dem Produkte der äußern Glieder.** b heißt hier die mittlere (geometr.) Proportionalzahl zu a und b, so wie c die dritte Proportionalzahl zu a und b.

Man findet daher die mittlere Proportionalzahl zu zwei Zahlen, wenn man aus dem Produkte dieser zwei Zahlen die Quadratwurzel zieht.

Ist umgekehrt gegeben: $b^2 = ac$, so folgt daraus die Proportion (M, d. h. ist das Quadrat einer Zahl gleich dem Produkte zweier andern Zahlen, so ist erstere Zahl die mittlere Proportionale zu den beiden andern.

Zus. Logarithmirt man die Gleichung (N, so erhält man:

$$\text{Log } b = \frac{\log a + \log c}{2}.$$

Nach §. 95. 3. heißt dieß: ist eine Zahl die mittlere geometrische Proportionale zu zwei andern, so ist ihr Logarithmus die mittlere arithmetische Proportionalzahl zu den Logarithmen der beiden andern. Nach diesem Satze wurden die Logarithmen berechnet.

Vierter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

§. 97. Das Produkt zweier einfachen Gleichungen mit der nemlichen Unbekannten gibt eine quadratische Gleichung. Die allgemeine Form einer einfachen Gleichung mit einer Unbekannten ist: $ax + b = c$; oder wenn wir durch Division den Coëffizienten von x entfernen, erhalten wir die Form:

$$x + a_1 = b_1 \ldots. \text{ (A}$$

a_1 und b_1 können ganze, oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn.

Multiplizirt man nun die Gleichung (A mit folgender Gleichung derselben Form, (in der wieder a_2, b_2 ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn können)

$$x + a_2 = b_2 \ldots. \text{ (B}$$

so erhält man:

$$x^2 + x(a_1 + a_2) + a_1 a_2 = b_1 b_2 \ldots. \text{ (C}$$

Die quadratische Gleichung (C besteht also aus drei Gliedern: das erste Glied enthält die Unbekannte in der zweiten Potenz, positiv und ohne Coëffizienten außer 1; (denn wäre dieses Glied negativ, so könnte man es durch Veränderung der Zeichen aller Glieder positiv machen, und einen allenfallsigen Coëffizienten könnte man durch Divison wegschaffen).

Das zweite Glied enthält die Unbekannte in der ersten Potenz mit einem bekannten Coëffizienten.

Das dritte Glied enthält eine bekannte Zahl; diese bekannte Zahl ist aber ein Produkt jener Zahlen, deren Summe der Coëffizient des zweiten Gliedes ist.

Die zweite Seite der Gleichung ist ebenfalls ein Produkt.

Wenn wir $a_1 + a_2 = P$; $a_1 a_2 = Q$, und $b_1 b_2 = R$ setzen, so erhalten wir für die Gleichung (C die einfache Form:

$$x^2 + Px + Q = R \ldots. (D$$

§. 98. Wollen wir nun die Gleichung (D auflösen, so müssen wir beide Seiten der Gleichung in Faktoren auflösen; die erste Seite ist ein Produkt zweier Faktoren von der Form: $(x + a)(x + b)$; die Faktoren lassen sich also finden; die zweite Seite der Gleichung (D aber ist ein Produkt; ein einfaches Produkt aber läßt sich, wenn man gebrochene und irrationale Zahlen als Faktoren nicht ausschließt (was der Allgemeinheit wegen nicht geschehen darf), unendlich mannigfaltig in zwei Faktoren zerfällen; und auch nach der Auffindung dieser Faktoren wäre unentschieden, welche Faktoren der beiden Seiten zusammen gehören.

Man beschränkt also die Auflösung dieser Gleichung auf den Fall, daß eine der beiden Gleichungen (A oder (B vor der Multiplikation auf Null gebracht worden sey; in diesem Falle wird die zweite Seite der Gleichung (B als ein Produkt, dessen einer Faktor Null ist, selbst Null. Wir erhalten daher als die allgemeine Form einer zu lösenden quadratischen Gleichung:

$$x^2 + Px + Q = o \ldots. (E$$

und eine Gleichung, auf diese Form gebracht, heißt **geordnet**. P und Q können ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn.

§. 99. Um nun die Gleichung (E aufzulösen, wissen wir bereits, daß sie ein Produkt zweier Faktoren von der Form: $(x + a)(x + b)$ sey, von denen aber der eine Null seyn muß; wir setzen also:

$x^2 + Px + Q = (x + a)(x + b)$; daraus erhält man:

$x^2 + Px + Q = x^2 + (a + b)x + ab$

Aus der Vergleichung beider Seiten ergibt sich, daß

$$a + b = P \ldots. (1$$

$$ab = Q \ldots. (2$$

Um a und b zu bestimmen, quadriren wir die Gleichung (1 und subtrahiren davon die vierfache Gleichung (2, so hat man

$$\begin{array}{rl} a^2 + 2ab + b^2 & = P^2 \\ 4ab & = 4Q \\ - \quad & - \\ \hline a^2 - 2ab + b^2 & = P^2 - 4Q \end{array}$$

und wenn man beiderseits die Quadratwurzel auszieht, erhält man:

$$a - b = \sqrt{P^2 - 4Q} \;\ldots\; (3$$

Wir addiren nun die Gleichungen (1 und (3 und erhalten

$$a = \frac{1}{2} P + \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q}$$

Subtrahirt man aber (3 von (1, so erhält man:

$$b = \frac{1}{2} P - \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q}$$

Nun haben wir als Faktoren der aufzulösenden Gleichung angenommen: $(x + a)\,(x + b) = 0$; wir erhalten also, wenn wir für a und b die gefundenen Werthe setzen:

$$(x + [\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q}])\,(x + [\frac{1}{2} P - \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q}]) = 0 \;\ldots\; (F$$

Die Gleichung (F enthält nun die Faktoren, aus deren Multiplikation die Gleichung (E entstanden ist; der eine Faktor muß Null seyn. Setzen wir nun, der erste Faktor der Gleichung (F sey Null, so erhalten wir:

$$x + (\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q}) = 0; \text{ daher:}$$

$$x = -\frac{1}{2} P - \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q} \;\ldots\; (G$$

Setzen wir aber, der zweite Faktor sey Null, so hat man:

$$x + (\frac{1}{2} P - \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q}) = 0; \text{ daher}$$

$$x = -\frac{1}{2} P + \frac{1}{2} \sqrt{P^2 - 4Q} \;\ldots\; (H$$

Weil nun im Allgemeinen nicht angegeben werden kann, welcher der beiden Werthe von x ursprünglich Null war, so deuten wir die Möglichkeit der beiden Werthe in der allgemeinen Auflösung an, indem bei jedem speziellen Falle erst untersucht werden muß, welcher Werth der richtige sey; wir haben daher aus der allgemeinen Gleichung:

$$x^2 + Px + Q = 0 \;\ldots\; (E$$

$$x = -\frac{1}{2}P \pm \frac{1}{2}\sqrt{P^2 - 4Q} \; \ldots\ldots (K$$

oder: $$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \; \ldots\ldots (L$$

Soll nun eine quadratische Gleichung (mit einer Unbekannten) gelöst werden, so bringt man sie auf die Form (E und erhält daraus unmittelbar (K, oder noch bequemer (L.

Um die unmittelbare Auflösung auch für den Fall zu erhalten, wenn die Unbekannte in der zweiten Potenz einen Coëffizienten hat, der erst durch Division weggeschafft werden muß, um eine Gleichung von der Form (E zu erhalten; habe man:

$$ax^2 + bx + c = 0 \; \ldots\ldots (M$$

so erhält man: $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$

und daraus ergibt sich nach (K:

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{b^2}{a^2} - \frac{4c}{a}}$$

oder $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \; \ldots\ldots (N$$

so, daß wir aus der Gleichung (M die Gleichung (N unmittelbar abzuleiten im Stande sind.

§. 100. In der allgemeinen quadratischen Gleichung

$$x^2 + Px + Q = 0$$

kann nach unserer Annahme P und Q positiv oder negativ seyn; nehmen wir nun an, P und Q seyen nur positive Zahlen, so erhalten wir, um zu untersuchen, welchen Einfluß die Vorzeichen dieser Zahlen auf den Werth der Unbekannten haben, folgende mögliche Fälle:

$$x^2 + Px - Q = 0 \; \ldots\ldots (1$$
$$x^2 - Px - Q = 0 \; \ldots\ldots (2$$
$$x^2 + Px + Q = 0 \; \ldots\ldots (3$$
$$x^2 - Px + Q = 0 \; \ldots\ldots (4$$

Die Auflösungen sind beziehungsweise nach (L:

$$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 + 4Q}}{2} \ldots . (1$$

$$x = \frac{P \pm \sqrt{P^2 + 4Q}}{2} \ldots . (2$$

$$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \ldots . (3$$

$$x = \frac{P \pm \sqrt{P^2 - 4Q}}{2} \ldots . (4$$

In der Gleichung (1 erhalten wir, da P und Q positive Zahlen sind, und: $\sqrt{P^2 + 4Q} > P$; immer wirkliche (reelle) Zahlen als Werthe für x, von denen der eine aber positiv, der andere negativ ist; dasselbe gilt für die Gleichung (2.

Der Ausdruck: $\sqrt{P^2 - 4Q}$ kann in der Gleichung (3 und (4 entweder Null, oder positiv oder negativ seyn; ist $P^2 - 4Q = 0$; also $Q = \frac{1}{4} P^2$, so gehen die Gleichungen (3 und (4 beziehungsweise über in vollständige Quadrate, nemlich:

$$x^2 \pm Px + \frac{1}{4}P^2 = 0; \text{ oder}$$

$$(x \pm \frac{1}{2} P)^2 = 0$$

daher in (3 : $x = -\frac{1}{2} P$; und in (4 : $x = \frac{1}{2} P$

In diesem Falle sind die beiden einfachen Gleichungen, durch deren Multiplikation die quadratische entstand, schon vor der Multiplikation auf Null gebracht.

Ist $P^2 - 4Q$ positiv, d. i. $P^2 > 4Q$, so ist $\sqrt{P^2 - 4Q} < P$; wir erhalten daher in (3 zwei negative, in (4 zwei positive Werthe.

Ist endlich in (3 und (4: $P^2 - 4Q$ negativ; also $4Q > P^2$, so hat man:

$$x = \frac{\mp P \pm \sqrt{(4Q - P^2) . (-1)}}{2} \text{ oder}$$

$$x = \frac{\mp P \pm \sqrt{(4Q - P^2)} \, . \, \sqrt{-1}}{2} = A \pm B\sqrt{-1}$$

Die Werthe für x sind also imaginär; es gibt also keine Zahl, die in die Gleichungen (3 und (4 statt x gesetzt, dieselben zu Null macht.

§. 101. Wenn in der allgemeinen Gleichung:

$$x^2 + Px + Q = 0 \; .... \; (E$$

der Coëffizient von x, der eine Summe ist, Null wird, also wenn: $P = p + (-p)$ ist, so verschwindet das zweite Glied, und wir erhalten eine unvollständige quadratische Gleichung, wohl auch binomische oder reine quadratische Gleichung genannt.

Um die Gleichung (E, ohne die Werthe von x zu ändern, auf eine unvollständige Gleichung zu bringen, setzen wir

$$x = y + m$$

Setzen wir nun statt x den angenommenen Werth $(y+m)$ in die Gleichung (E, so erhält man:

$$(y+m)^2 + P(y+m) + Q = 0; \text{ oder}$$

$$y^2 + y(2m + P) + (m^2 + Pm + Q) = 0 \; .... \; (\alpha$$

Die Gleichung (α hat nun wieder die Form einer vollständigen quadratischen Gleichung für die Unbekannte y; aber die Werthe für y und m sind von unserer Willkühr abhängig, wenn wir sie nur so nehmen, daß ihre Summe $(y+m)$ dem x gleich sey. Wir können daher m so nehmen, daß $2m+P$, der Coëffizient von y, Null wird, wodurch die Gleichung (α dann in eine unvollständige übergeht; wir haben daher:

$$2m + P = 0; \text{ also}$$

$$m = -\frac{P}{2}$$

Substituiren wir nun diesen Werth von m in die Gleichung (α, so haben wir

$$y^2 + \frac{P^2}{4} - \frac{P^2}{2} + Q = 0; \text{ oder}$$

$$y^2 - \frac{P^2}{4} + Q = 0; \text{ oder}$$

$$y^2 - \frac{P^2 - 4Q}{4} = 0 \ldots (\beta$$

Betrachten wir die Gleichung (β als eine Differenz zweier Quadrate, so erhalten wir:

$$(y + \sqrt{\frac{P^2 - 4Q}{4}})\ (y - \sqrt{\frac{P^2 - 4Q}{4}}) = 0$$

Damit das Produkt dieser beiden Faktoren Null werde, muß der eine davon Null seyn; aber bei der Bestimmung, welcher Null sey, sind wir in der nemlichen Ungewißheit wie §. 99; wir setzen also auch hier: entweder

$$y + \sqrt{\frac{P^2-4Q}{4}} = 0; \text{ daher}$$

$$y = -\sqrt{\frac{P^2-4Q}{4}}; \text{ oder}$$

$$y - \sqrt{\frac{P^2-4Q}{4}} = 0; \text{ und daraus}$$

$$y = \sqrt{\frac{P^2-4Q}{4}}$$

Um in der Allgemeinheit keinen der beiden Fälle auszuschließen, setzen wir also:

$$y = \pm \sqrt{\frac{P^2-4Q}{4}} \ldots (\gamma$$

Da wir nun y und m bestimmt haben, so ist uns auch: $x = y + m$ gegeben; wir haben nemlich:

$$x = -\frac{P}{2} \pm \sqrt{\frac{P^2-4Q}{4}}; \text{ oder}$$

$$x = \frac{-P \pm \sqrt{P^2-4Q}}{2}$$

welche Gleichung die nemliche ist, welche wir unter (L §. 99. gefunden haben.

§. 102. Noch wollen wir kurz jene Gleichungen betrachten, die den zweiten Grad übersteigen, aber durch einfache Sub-

stitution sich auf quadratische reduziren lassen; solche Gleichungen sind alle, die unter der Form:

$$x^{2n} + ax^n + b = 0 \ldots (1$$

vorkommen; n kann eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl seyn. Setzen wir nemlich:

$$x^n = y; \text{ also}$$

$$x^{2n} = y^2;$$ so geht durch gehörige Substitution die Gleichung (1 über in:

$$y^2 + ay + b = 0 \ldots (2$$

welche Gleichung offenbar eine quadratische ist.

Aus der Gleichung (2 erhalten wir unmittelbar:

$$y = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}; \text{ und da}$$

$y = x^n$; also $\sqrt[n]{y} = x$, so erhalten wir:

$$x = \sqrt[n]{\left(\frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4b}}{2}\right)} \ldots (3$$

und wir können nun die Gleichung (3 aus der Gleichung (1 unmittelbar ableiten.

§. 103. Wir wollen nun einige quadratische Gleichungen lösen.

1. $x^2 + 7x - 44 = 0$; wir haben unmittelbar nach §. 99. (L:

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 176}}{2}; \text{ also}$$

$$x = \frac{-7 \pm 15}{2}; \text{ daher entweder}$$

$$x = 4; \text{ oder}$$

$$x = -11.$$

Gesetzt nun $x = 4$ ist der richtige Werth unserer Gleichung, so kann die gegebene Gleichung als ein Produkt folgender zwei Faktoren angesehen werden; nemlich:

$$x - 4 = 0; \text{ und}$$

$$x + 11 = 15.$$

Wir haben nun: $(x - 4)(x + 11) = 15 \times 0$ oder

$$x^2 + 7x - 44 = 0.$$

Wäre dagegen der richtige Werth: $x = -11$, so hätte man:

$$x + 11 = 0$$
$$x - 4 = -15$$

und wir haben wieder:

$$(x + 11)(x - 4) = x^2 + 7x - 44 = 0$$

2. $\sqrt{(2x - 1)} + \sqrt{(3x + 1)} = \sqrt{(9x + 4)}$.

Um diese Gleichung auf die Form (E §. 100. zu bringen, potenziren wir beiderseits mit 2, so hat man:

$$(2x - 1) + (3x + 1) + 2\sqrt{(2x - 1)(3x + 1)} = 9x + 4;$$

daraus: $\sqrt{6x^2 - x - 1} = 2x + 2$.

Quadriren wir die beiden Seiten der letzten Gleichung neuerdings, so erhalten wir:

$$6x^2 - x - 1 = 4x^2 + 8x + 4; \text{ daher}$$
$$2x^2 - 9x - 5 = 0.$$

Aus §. 99. (M und (N haben wir unmittelbar:

$$x = \frac{9 \pm \sqrt{81 + 40}}{2}; \text{ daher}$$

$$x = \frac{9 \pm 11}{2}; \text{ und}$$

$$x = 5.$$

Anmerk. Die gegebene Gleichung hat nur einen Werth für x, nemlich: $x = 5$; denn der richtige Werth für x in unsere gegebene Gleichung substituirt, muß sie identisch machen; man hat aber:

$$\sqrt{9} + \sqrt{16} = \sqrt{49} \text{ oder}$$
$$3 + 4 = 7; \text{ daher}$$
$$7 = 7.$$

Würde man aber den andern Werth $x = -\frac{1}{2}$ substituiren, so erhielte man:

$$\sqrt{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{-2} = \frac{1}{2}\sqrt{-2}$$

welcher Werth die Gleichung offenbar nicht identisch macht. Wäre aber die ursprüngliche Gleichung so gegeben gewesen:

$$\sqrt{(2x-1)} - \sqrt{(3x+1)} = \sqrt{(9x+1)}$$

so würden wir aus dieser als geordnete Gleichung wieder erhalten haben:

$$2x^2 - 9x - 5 = 0.$$

Nun wäre aber der Werth: $x = 5$ nicht mehr anwendbar, sondern allein nur: $x = -\frac{1}{2}$.

Durch wirkliche Substitution kann man sich leicht davon überzeugen.

3. $$\frac{17+x}{2(4-x)} = \frac{7x+4}{5(x-2)} + \frac{5}{x-2}.$$

Nach Wegschaffung der Brüche erhalten wir:

$$5(17+x)(x-2) = 2(7x+4)(4-x) + 50(4-x).$$

Führen wir die angezeigten Multiplikationen aus, und bringen, nach gehörigen Reduktionen, die Gleichung auf Null, so erhalten wir:

$$19x^2 + 77x - 402 = 0.$$

Daraus erhalten wir unmittelbar:

$$x = \frac{-77 \pm \sqrt{77^2 + 4 \,.\, 19 \,.\, 402}}{38}; \text{ oder:}$$

$$x = \frac{-77 \pm \sqrt{36481}}{38}; \text{ daher:}$$

$$x = \frac{-77 \pm 191}{38}; \text{ also entweder}$$

$$x = 3; \text{ oder}$$

$$x = -7\frac{1}{19}.$$

Fünfter Abschnitt.

Quadratische Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten.

§. 104. Eine quadratische Gleichung mit zwei Unbekannten kann, wie jene mit einer Unbekannten, betrachtet werden als ein

Produkt zweier einfachen Gleichungen mit zwei Unbekannten. Da nun diese Gleichungen unter der allgemeinen Form:

$$ax + by + c = d \text{ und}$$

$$a_1x + b_1y + c_1 = d_1$$

gegeben sind, so gibt das Produkt:

$$(ax + by + c)(a_1x + b_1y + c_1) = dd_1.$$

Entwickelt man nun das Produkt, und setzt statt der vorkommenden Produkte und Summen bekannter Zahlen die einfachen Zahlen: A, B, C ...., so erhält man als die allgemeine Form einer vollständigen quadratischen Gleichung mit zwei Unbekannten:

$$Ax^2 + By^2 + Cxy + Dx + Ey + F = M \text{ .... (1}$$

Jedoch kommen in Gleichungen, die zur Auflösung gegeben werden, selten alle Glieder vor; so können z. B. von den drei ersten Gliedern zwei fehlen, ohne daß die Gleichung aufhört, quadratisch zu seyn.

Anmerk. In wie ferne einige Coëffizienten z. B. C, D, E ... unter gewissen Bedingungen Null werden, und somit die Glieder Cxy, Dx, Ey ... verschwinden; dieß zu untersuchen, wäre hier zu weitläufig. Um aus der gegebenen Gleichung (1 die Werthe für x und y bestimmen zu können, muß noch eine zweite Gleichung gegeben seyn; diese zweite Gleichung kann vom ersten oder zweiten Grade seyn. Aber immer muß die Verbindung der beiden gegebenen Gleichungen auf keine höhere Gleichung führen, als auf eine quadratische, oder auf eine solche, die sich durch Zahlenverbindungen, die wir bisher kennen lernten, auf eine quadratische reduziren läßt.

§. 105. So wie wir einfache Gleichungen mit zwei oder mehr Unbekannten durch Elimination auf eine Gleichung mit einer Unbekannten brachten, diese Unbekannte suchten, und durch gehörige Substitution die Werthe der übrigen Unbekannten fanden; so könnten wir auch bei quadratischen im Allgemeinen auf diesem Wege zum Ziele gelangen. Obgleich aber dieser Weg der kürzeste scheint, so ist er doch nicht immer der sicherste und bequemste; daher suchen wir in verwickelten Gleichungen der Art

häufig nicht unmittelbar den Werth einer Unbekannten, sondern eine einfache Verbindung der Unbekannten, als: ihre Summe, oder Differenz, Produkt u s. w.

Da sich aber für dieses Verfahren keine allgemeinen Gesetze angeben lassen, sondern die zweckmäßigste Art der Auflösung erst aus speziellen Aufgaben abgenommen werden kann, so sollen mehrere Gleichungen der Art hier gelöst werden.

1. Gl. $x + y = a \ldots\ldots (1$

$xy = b \ldots\ldots (2$

Aufl. Wir quadriren die Gleichung (1, und subtrahiren davon die vierfache Gleichung (2, so erhält man, wenn wir aus der so erhaltenen Gleichung die Quadratwurzel ausziehen:

$$x - y = \sqrt{a^2 - 4b} \ldots\ldots (3$$

Addiren wir nun (1 und (3, so haben wir:

$$x = \frac{a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Subtrahiren wir aber (3 von (1, so erhalten wir

$$y = \frac{a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}.$$

Die Gleichung ist nun gelöst. Da aber $x^2 - 2xy + y^2$ entstanden gedacht werden kann aus $(x - y)^2$ oder aus $(y - x)^2$, so können wir die Werthe von x und y gegenseitig vertauschen; solche Gleichungen heißen symmetrische.

2. Gl. $x + y = a \ldots\ldots (4$

$x^2 + y^2 = b \ldots\ldots (5$

Aufl. Wir subtrahiren die Gleichung (5 vom Quadrate der Gleichung (4 so haben wir, wenn wir überdieß die so erhaltene Gleichung durch 2 dividiren:

$$xy = \frac{a^2 - b}{2} \ldots\ldots (6$$

Aus (4 und (6 können wir nun x und y nach der ersten Gleichung finden.

3. Gl. $x + y = a \ldots\ldots (7$

$x^3 + y^3 = b \ldots\ldots (8$

Aufl. Wenn wir die Gleichung (7 zum Kubus erheben, und subtrahiren davon die Gleichung (8, so erhalten wir:

$$3x^2y + 3xy^2 = a^3 - b$$

oder: $xy(x+y) = \frac{a^3-b}{3}$; oder, da $x+y=a$

so haben wir: $xy = \frac{a^3 - b}{3a}$ ..... (9

Durch die Gleichungen (7 und (9 haben wir nun diese Gleichung auf die erste reduzirt.

4. Gl. $x+y=a$ ..... (1

$x^4+y^4=b$ ..... (2

Aufl. Wir potenziren die Gleichung (1 mit 4, (d h. wir multipliziren $(x+y)^3$ mit $(x+y)$, so erhalten wir:

$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4=a^4 \text{ ..... (3}$$

Wir subtrahiren (2 von (3, so erhalten wir:

$$2xy(2x^2+3xy+2y^2)=a^4-b, \text{ oder}$$

$$2x^2+3xy+2y^2 = \frac{a^4-b}{2xy} \text{ ..... (4}$$

Wir quadriren nun die Gleichung (1, multipliziren dieses Quadrat mit 2, so haben wir:

$$2x^2+4xy+2y^2=2a^2 \text{ ..... (5}$$

Subtrahiren wir nun (4 von (5, so erhalten wir:

$$xy = 2a^2 - \frac{a^4-b}{2xy}; \text{ oder}$$

$$2(xy)^2 = 4a^2(xy) - (a^4-b); \text{ oder}$$

$$2(xy)^2 - 4a^2(xy) - (b-a^4) = 0.$$

Daraus erhalten wir, wenn wir (xy) als Unbekannte betrachten:

$$xy = \frac{4a^2 \pm \sqrt{16a^4+8(b-a^4)}}{4}$$

$$xy = \frac{4a^2 \pm \sqrt{8a^4+8b}}{4}; \text{ oder}$$

$$xy = \frac{2a^2 \pm \sqrt{2a^4+2b}}{2} \text{ ..... (6}$$

Die gegebene Gleichung ist also durch (1 und (6 auf die erste Gleichung zurückgeführt.

5. Gl. $x+y=xy \ldots\ldots (1$

$x+y+x^2+y^2=a \ldots\ldots (2$

Aufl. Wir quadriren die Gleichung (1, so haben wir:

$$x^2+2xy+y^2=(xy)^2 \ldots\ldots (3$$

Substituiren wir in (2 statt $(x+y)$ dessen Werth (xy), so gibt es:

$$(xy)+x^2+y^2=a \ldots\ldots (4$$

Wir subtrahiren nun (4 von (3, so haben wir:

$(xy)=(xy)^2-a$; oder

$(xy)^2-(xy)-a=0$; daher

$$xy=\frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}=b \ldots\ldots (5$$

Da nun aus (4 : $x^2+y^2=a-b$, und

$xy=b$, so haben wir:

$x^2-2xy+y^2=a-3b$; also

$$x-y=\sqrt{a-3b} \ldots\ldots (6$$

Addiren wir $(x+y)=b$ zu (6, so haben wir

$$x=\frac{b+\sqrt{a-3b}}{2}; \text{ und durch Subtraktion}$$

$$y=\frac{b-\sqrt{a-3b}}{2}.$$

Statt der einfachen Zahl b dürfen wir jetzt nur deren Aequivalent aus (5 substituiren.

Auch diese Gleichung ist, wie die vorhergehenden, symmetrisch.

6. Gl. $(x-y)(x^2-y^2)=a \ldots\ldots (1$

$(x+y)(x^2+y^2)=b \ldots\ldots (2$

Aufl. Wir führen in beiden Gleichungen die angezeigten Multiplikationen aus; dann addiren wir (1 und (2 so haben wir:

$$x^3+y^3=\frac{a+b}{2} \ldots\ldots (3$$

Eben so subtrahiren wir (1 von (2, so erhalten wir:

$$x^2y + xy^2 = \frac{b-a}{2}; \text{ daher}$$

$$3x^2y + 3xy^2 = \frac{3b-3a}{2} \;\ldots\ldots (4$$

Addiren wir (3 und (4, und ziehen dann beiderseits die Kubikwurzel aus, so haben wir:

$$x + y = \sqrt[3]{(2b-a)} \;\ldots\ldots (5$$

Substituiren wir den Werth von $(x + y)$ aus (5 in (1, so ergibt sich:

$$(x-y)^2 = \frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}; \text{ daher}$$

$$x - y = \pm \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}} \;\ldots\ldots (6$$

Wir addiren (5 und (6, so erhalten wir

$$x = \left(\sqrt[3]{(2b-a)} \pm \sqrt{\frac{a}{\sqrt[3]{(2b-a)}}}\right) : 2; \text{ oder}$$

$$x = \frac{\sqrt{(2b-a)} \pm \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}; \text{ also:}$$

$$y = \frac{\sqrt{(2b-a)} \mp \sqrt{a}}{2\sqrt[6]{(2b-a)}}.$$

7. Gl.

$$\frac{xyz}{x+y} = a$$

$$\frac{xyz}{y+z} = b$$

$$\frac{xyz}{x+z} = c$$

Aufl. Indem wir in jeder dieser drei Gleichungen die Brüche wegschaffen, und dann jede Gleichung durch (xyz) dividiren, erhalten wir:

$$\frac{a}{yz} + \frac{a}{xz} = 1$$

$$\frac{b}{xz} + \frac{b}{xy} = 1$$

$$\frac{c}{yz} + \frac{c}{xy} = 1$$

Wir setzen nun: $\frac{1}{yz} = x_1$; $\frac{1}{xz} = x_2$; $\frac{1}{xy} = x_3$, so haben wir durch gehörige Substitution:

$$ax_1 + ax_2 = 1$$
$$bx_2 + bx_3 = 1$$
$$cx_1 + cx_3 = 1$$

Lösen wir diese Gleichungen, so erhalten wir:

$$x_1 = \frac{ab + bc - ac}{2abc}$$

$$x_2 = \frac{ac + bc - ab}{2abc}$$

$$x_3 = \frac{ab + ac - bc}{2abc}$$

Mithin erhalten wir durch Substitution:

$$yz = \frac{2abc}{ab + bc - ac} = A \dots (1$$

$$xz = \frac{2abc}{ac + bc - ab} = B \dots (2$$

$$xy = \frac{2abc}{ab + ac - bc} = C \dots (3$$

Multipliziren wir die Gleichungen (1, (2, (3 miteinander, und ziehen aus dem Produkte die Quadratwurzel, so erhalten wir:

$$xyz = \pm \sqrt{ABC} \dots (4$$

Dividiren wir die Gleichung (4 nach der Reihe durch die Gleichung (1, (2, (3, so erhalten wir

$$x = \pm \sqrt{\frac{BC}{A}} = \pm \sqrt{\left(\frac{2abc\,(ab + bc - ac)}{(ac + bc - ab)\,(ac + ab - bc)}\right)}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{AC}{B}}$$

$$z = \pm \sqrt{\frac{AB}{C}}$$

Gl. 8. $x^3 - y^3 = a \ldots (1$

$x - y = b \ldots (2$

Aufl. Wir dividiren (1 durch (2, so haben wir:

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{a}{b} \ldots (3$$

Die Gleichung (2 quadrirt, und diese dann abgezogen von (3, gibt:

$$3xy = \frac{a-b^3}{b} \text{ oder}$$

$$xy = \frac{a-b^3}{3b} \ldots (4$$

Die Gleichungen (3 und (4 addirt, und dann beiderseits die Quadratwurzel ausgezogen, gibt:

$$x + y = \pm \sqrt{\frac{4a - b^3}{3b}} \ldots (5$$

Durch Addition und Subtraktion von (2 und (5 ergibt sich x und y.

Gl. 9. $3x^2 + 2y^2 + z^2 = 109 \ldots (1$

$2x + 5y - 6\frac{1}{4}z = 0 \ldots (2$

$3x + 2z - 7\frac{2}{3}y = 0 \ldots (3$

Aufl. Wir entfernen aus der Gleichung (2 und (3 die Brüche, so haben wir:

$$8x + 20y - 25z = 0 \ldots (4$$
$$9x + 6z - 23y = 0 \ldots (5$$

Gleichung (4 von (5 subtrahirt, gibt:

$$x - 43y + 31z = 0 \ldots (6$$

Die Gleichung (6 mit 8 multiplizirt, und dann von (4 subtrahirt, gibt:

$$364y - 273z = 0; \text{ oder}$$

$$4y = 3z; \text{ oder } z = \frac{4y}{3} \ldots (7$$

Die Gleichung (5 mit 4 multiplizirt, und zu (4 addirt, gibt:

$$44x - 72y - z = 0 \ldots (8$$

Die Gleichung (8 mit 6 multiplizirt, und zu (5 addirt:

$$273x - 455y = 0; \text{ oder}$$

$$x = \frac{5y}{3} \ldots . (9$$

Nun (7 und (9 in (1 substituirt, erhält man:

$$\frac{25y^2}{3} + 2y^2 + \frac{16y^2}{9} = 109; \text{ oder}$$

$$75y^2 + 18y^2 + 16y^2 = 981$$

$$109y^2 = 891$$

$$y^2 = 9; \text{ also}$$

$$y = \pm\ 3 \text{ u. s. f.}$$

10. Zum Schlusse soll noch folgende Gleichung gelöst werden:

$$6ux + 4u + 10x = 41 \ldots . (1$$

$$2xy + 3x - 2y = 29 \ldots . (2$$

$$5yz + 4y - 3z = 42 \ldots . (3$$

$$8uz + 5z - 4u = 7 \ldots . (4$$

Wir substituiren den Werth von $x = \frac{41 - 4u}{6u + 10}$ aus (1 in (2 und erhalten dadurch nach gehöriger Reduktion:

$$y = \frac{186u + 167}{62 - 20u} \ldots . (5$$

Wir substituiren den Werth von y aus (5 in (3, dann erhalten wir nach Vereinfachung:

$$z = \frac{176 - 144u}{90u + 59} \ldots . (6$$

Den Werth von z aus (6 in (4 substituirt, gibt die Endgleichung nach nothwendiger Reduktion:

$$1512u^2 + 178u - 467 = 0; \text{ daher}$$

$$u = \frac{-178 \pm \sqrt{178^2 + 4 . 467 . 1512}}{3024}; \text{ oder}$$

$$u = \frac{-178 \pm 1690}{3024}; \text{ also entweder}$$

$$u = \frac{1}{2}; \text{ oder } u = -\frac{313}{504}$$

Für den Werth $u = \frac{1}{2}$ findet man leicht:

$$z = 1; \; y = 5; \; x = 3.$$

Sechster Abschnitt.

Progressionen.

§. 105. Eine Reihe von Zahlen, in welcher drei beliebige, unmittelbar aufeinanderfolgende, Glieder immer eine stetige Proportion bilden, heißt Progression, und zwar arithmetische oder geometrische, je nachdem die stetigen Proportionen arithmetisch oder geometrisch sind.

§. 106. Ist eine arithmetische Progression allgemein:

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4\ \ldots\ t_{n-1},\ t_n$$

so hat man nach §. 105:

$$t_1 - t_2 = t_2 - t_3 = t_3 - t_4 = t_4 - t_5 \ldots = t_{n-1} - t_n\ .$$

Es hat also in einer arithmetischen Progression jedes Paar aufeinander folgender Glieder dieselbe Differenz.

Bezeichnen wir das erste Glied der allgemeinen Progression t_1 mit a, und heißen wir die constante Differenz d (a und d können ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen seyn), so haben wir:

$$\begin{aligned} t_1 &= a \\ t_2 &= t_1 + d = a + d \\ t_3 &= t_2 + d = a + 2d \\ t_4 &= t_3 + d = a + 3d \\ t_5 &= t_4 + d = a + 4d \ldots \end{aligned}$$

Jedes Glied der Progression ist also eine Summe aus dem ersten Gliede und der Differenz; die Differenz aber hat einen Coëffizienten, welcher der Anzahl der vorausgehenden Glieder gleich ist; wir haben also allgemein:

$$t_n = a + (n-1)\, d \ \ldots\ (1$$

n drückt die Anzahl der Glieder, so wie t_n das letzte Glied aus. Durch Transposition erhalten wir aus (1

$$a = t_n - (n-1)\, d \ldots\ (2$$

$$n = \frac{t_n - a + d}{d} \ \ldots\ (3$$

$$d = \frac{t_n - a}{n-1} \ \ldots\ (4$$

Sind also in einer arithmetischen Progression von den vier Zahlen: a, d, n, t_n drei gegeben, so kann die vierte nach den angegebenen Gleichungen gefunden werden.

§. 107. Außer den vier bemerkten Zahlen einer arithmetischen Progression berücksichtigt man noch die Summe aller Glieder, die wir durch S_n bezeichnen: man erhält aber offenbar die Summe aller Glieder, wenn man die Glieder nach der Reihe addirt, d. h.

$$S_n = a + (a + d) + (a + 2d) + (a + 3d) \dots + (t_n - 2d) + (t_n - d) + t_n \dots (5$$

Wir erhalten aber dieselbe Summe, wenn wir so addiren:

$$S_n = t_n + (t_n - d) + t_n - 2d) + t_n - 3d) \dots + (a + 2d) + (a + d) + a \ (6$$

Addiren wir nun die Gleichungen (5 und (6 so haben wir:

$$2S_n = (a + t_n) + (a + t_n) + (a + t_n) + \dots (a + t_n) + (a + t_n)$$

Auf der zweiten Seite der letzten Gleichung haben wir jetzt die gleiche Summe $(a + t_n)$ so oft als Summand zu nehmen, als die Progression Glieder hat: d. i. n^{mal}; wir haben also:

$$2S_n = (a + t_n) n; \text{ oder}$$

$$S_n = (a + t_n) \frac{n}{2} \dots (7$$

Aus (7 erhalten wir:

$$a = \frac{2S_n}{n} - t_n \dots (8$$

$$t_n = \frac{2S_n}{n} - a \dots (9$$

$$n = \frac{2S_n}{a + t_n} \dots (10$$

Sind also von den vier Zahlen a, n, t_n, S_n einer arithmetischen Progression drei gegeben, so findet man die vierte durch die hier aufgestellten Gleichungen.

Verbindet man überdieß die gleichen Werthe aus (2 und (8, eben so aus (1 und (9, und endlich aus (3 und (10 als neue Gleichungen, so erhalten wir zu den bereits gefundenen acht Gleichungen noch zwölf, so daß wir, wenn in einer arith-

metischen Progression von den fünf Zahlen: a, n, d, t_n, S_n drei gegeben sind, jede der beiden fehlenden durch diese Gleichungen finden können.

§. 108. Ist eine geometrische Progression allgemein:

$$t_1,\ t_2,\ t_3,\ t_4,\ t_5\ \ldots\ldots\ t_{n-1},\ t_n$$

so haben wir nach §. 105:

$$t_1 : t_2 = t_2 : t_3 = t_3 : t_4 = t_4 : t_5 \ldots = t_{n-1} : t_n$$

d. h. in einer geometrischen Progression gibt jedes Paar unmittelbar aufeinander folgender Glieder den nemlichen Quotienten.

Bezeichnen wir nun das erste Glied t_1 mit a, und heißen den constanten Quotienten q (a und q können wieder ganze oder gebrochene ꝛc. . . . Zahlen seyn), so haben wir:

$$t_1 = a$$
$$t_2 = aq$$
$$t_3 = t_2q = aq^2$$
$$t_4 = t_3q = aq^3$$
$$t_5 = t_4q = aq^4 \ldots$$

Es ist also jedes Glied einer geometrischen Progression ein Produkt aus dem ersten Gliede und dem Quotienten; der Quotient hat aber einen Exponenten, welcher der Anzahl der vorausgehenden Glieder gleich ist; wir haben also allgemein:

$$t_n = aq^{n-1} \ldots (1$$

Aus der Gleichung (1 erhalten wir:

$$a = \frac{t_n}{q^{n-1}} \ldots (2$$

$$q = \sqrt[n-1]{\frac{t_n}{a}} \ldots (3$$

$$n = \frac{\log t_n - \log a + \log q}{\log q} \ldots (4$$

Wenn also von diesen vier Zahlen a, n, q, t_n drei gegeben sind, so läßt sich die vierte durch die aufgestellten Gleichungen finden.

§. 109. Bezeichnen wir die Summe einer geometrischen Progression durch S_n, so haben wir offenbar:

$$S_n = a + aq + aq^2 + aq + .. aq^{n-} + aq^{n-2} + aq^{n-1} \ldots (5$$

Multiplizirt man beide Seiten dieser Gleichung mit q, so erhält man:

$qS_n = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 \ldots aq^{n-2} + aq^{n-1} + aq^n \ldots$ (6

Subtrahiren wir nun die Gleichung (5 von (6, so haben wir:

$$qS_n - S_n = aq^n - a;\ \text{also:}$$

$$S_n = \frac{aq^n - a}{q-1} = \ldots (7$$

Aus der Gleichung (1 (§. 108) haben wir $t_n = aq^{n-1}$; daher: $qt_n = aq^n$; und dieser Werth in (7 substituirt, gibt:

$$S_n = \frac{qt_n - a}{q-1} \ldots (9$$

Aus den Gleichungen (7 und (9 kann man die Werthe für a, q, t_n, n bestimmen; und die so erhaltenen Gleichungen beziehungsweise mit den Gleichungen des §. 108. verbinden, so erhalten wir dadurch neue Gleichungen, um aus drei gegebenen Zahlen einer geometrischen Progression jede der zwei andern Zahlen zu finden, jedoch kommen einige Gleichungen vor, die den zweiten Grad übersteigen, für uns also nicht lösbar sind.

§. 110. Wenn die zweiten Seiten der Gleichungen (5 und (6 von §. 109. ohne Ende fortgehen, und wir subtrahiren dann (6 von (5, so erhalten wir:

$$S_n - q\,S_n = a;\ \text{daher}$$

$$S_n = \frac{a}{1-q} \ldots (10$$

Solche ohne Ende fortlaufende Progressionen sind die bereits früher betrachteten periodischen Dezimalbrüche, die wir also nach der Gleichung (10 summiren, d. h. in einen gemeinen Bruch verwandeln können.

Es sey gegeben der reinperiodische Dezimalbruch

$$c\beta^{-1} + b\beta^{-2} + c\beta^{-3} + b\beta^{-4} + c\beta^{-5} + b\beta^{-6} + \ldots (A$$

so können wir diesen Bruch auch so ausdrücken:

$$(c\beta + b)\,\beta^{-2} + (c\beta + b)\,\beta^{-4} + (c\beta + b)\,\beta^{-6} \ldots (B$$

Der Bruch (B stellt sich nun als geometrische Progression dar, die ohne Ende fortgeht; das erste Glied ist $a = (c\beta + b)\beta^{-2}$; der Quotient $q = \beta^{-2}$; daher hat man:

$$S_n = \frac{(c\beta + b)\beta^{-2}}{1 - \beta^{-2}} = \frac{(c\beta + b)\beta^{-2}}{1 - \frac{1}{\beta^2}} = \frac{(c\beta + b)}{\beta^2 - 1}$$

Soll z. B. der periodische Bruch: 0,454545.... als gemeiner Bruch dargestellt werden, so hat man:

$$0{,}454545 \ldots\ldots = 45\,(0{,}01 + 0{,}0001 + 0{,}000001 \ldots.)$$

Hier ist nun $a = 0{,}01$; $q = 0{,}01$; daher

$$S_n = \frac{0{,}01}{1 - 0{,}01} = \frac{0{,}01}{0{,}99} = \frac{1}{99};$$ daher:

$$0{,}454545 \ldots. = \frac{45}{99} = \frac{5}{11}.$$

Ist der gegebene Bruch gemischt periodisch, so muß der Werth der sich nicht mehr wiederholenden Ziffern von den Stellen, welche die Periode bilden, getrennt werden:

Es sey gegeben der Bruch: 0,465909090.... so hat man:

$$0{,}4659090 \ldots = 0{,}465 + 90(0{,}00001 + 0{,}0000001 + \ldots.)$$

Wir haben also: $a = 0{,}00001$; $q = 0{,}01$; daher:

$$S_n = \frac{0{,}00001}{1 - 0{,}01} = \frac{1}{99000};$$ daher der gegebene Bruch:

$$\frac{465}{1000} + \frac{90}{99000} = \frac{46125}{99000} = \frac{41}{88}.$$

Auch andere Reihen, die in geometrischer Progression ohne Ende fortlaufen, lassen sich nach (10 summiren; hieher gehören namentlich solche, die durch Entwicklung der Quotienten von der Form: $\frac{a}{b \pm x}$ entstehen.

Sey z. B. die Reihe zu summiren:

$$\frac{b}{c} + \frac{bx}{c^2} + \frac{bx^2}{c^3} + \frac{bx^3}{c^4} \ldots.$$

so hat man: $a = \frac{b}{c}$; $q = \frac{x}{c}$; daher;

$$S_n = \frac{b}{c} : (1 - \frac{x}{c});$$ also:

$$S_n = \frac{b}{c} : \frac{c - x}{c};$$ daher:

$$S_n = \frac{b}{c - x}.$$

Eben so findet man, wenn gegeben ist die Reihe:

$$\frac{m}{x} - \frac{mq}{x^2} + \frac{mq^2}{x^3} - \frac{mq^3}{x^4} \ldots .$$

daß: $a = \frac{m}{x}$; $q = -\frac{q}{x}$; daher

$$S_n = \frac{m}{x} : (1 + \frac{q}{x}); \text{ mithin:}$$

$$S_n = \frac{m}{x+q}.$$

Zweite Abtheilung

Geometrie.

Einleitung.

§. 1. Erklärungen. Die Wissenschaft der im Raume ausgedehnten stetigen Größen ist Geometrie.

Der Raum hat dreifache Ausdehnung: Länge, Breite und Höhe (oder Tiefe). Der so ausgedehnte, allenthalben begrenzte Raum heißt geometrischer Körper; die Grenze des Körpers heißt Fläche (mit zwei Ausdehnungen, nach Länge und Breite); die Grenze der Fläche heißt Linie (mit einer Ausdehnung, nach Länge); die Grenze der Linie heißt Punkt (der keine Ausdehnung hat).

Geometrische Größen, die in ihrer ganzen Ausdehnung, (also auch mit ihren Grenzen) bei gehöriger Lage zusammenfallen, heißen kongruent. ($\cong$)

Gibt man an, wie oft eine geometrische Größe, als Einheit genommen, in einer andern gleichartigen Größe enthalten sey, so heißt dieß messen; dadurch werden geometrische Größen als (benannte) Zahlen ausgedrückt.

Ist in zwei gleichartigen geometrischen Größen dieselbe Einheit gleich oft enthalten, so sagt man, die Größen seyen gleich ($=$).

Haben zwei geometrische Größen die nemliche Form, so heißen sie ähnlich ($\sim$).

§. 2. Erklärung. Eine Linie heißt gerade, wenn alle ihre Theile die nemliche Richtung haben; außerdem heißt sie krumm (Bezeichnung der Linie).

§. 3. Grundsatz. Zwischen zwei Punkten ist nur eine gerade Linie möglich, und diese ist unter allen die kürzeste.

Zus. 1. Zwei Gerade schneiden sich nur in einem Punkte.

Zus. 2. So wie durch zwei Punkte die Lage, so ist durch die Endpunkte überdieß noch die Größe einer Geraden bestimmt.

Zus. 3. Gleiche gerade Linien sind kongruent.

§. 4 Erkl. Wenn eine Gerade, zwischen zwei beliebigen Punkten einer Fläche gezogen, ganz in der Fläche liegt, so heißt die Fläche eben (eine Ebene); nicht ebene Flächen heißen krumm. Wir betrachten zuerst geometrische Größen, die in einer Ebene liegen, ebene Geometrie (Epipedometrie); dann geometrische Größen in mehrern Ebenen, körperliche Geometrie (Stereometrie).

I. Ebene Geometrie.

Erster Abschnitt.

Schneidende und parallele Linien. Figuren.

§. 5. Erkl. Die Neigung zweier Geraden, **BA**, **BC** (Fig. 1.) die einen Punkt **B** gemeinschaftlich haben, heißt Winkel; der Punkt **B** heißt Scheitel; die Geraden **BA**, **BC** heißen Schenkel des Winkels. Convergenz, Divergenz der Geraden, (Bezeichnung des Winkels.)

Zus. 1. Die Länge der Schenkel hat auf die Größe des Winkels keinen Einfluß.

Zus. 2. Gleiche Winkel sind kongruent.

Anmerk Man untersuche die Lage von einem Paare der Schenkel zweier ungleichen Winkel, wenn man die Scheitel, das andere Paar Schenkel, und die Winkel selbst auf einander legt.

§. 6. Erkl. Liegen die beiden Schenkel **BA**, **BC** (Fig. 2.) eines Winkels in gerader Linie, so heißt der Winkel ein gerader (gestreckter).

Zus. Alle geraden Winkel sind einander gleich (§. 3. Zus. 3.)

§. 7. Erkl. Zwei Winkel **CBA**, **CBD** (Fig. 3.), die einen gemeinschaftlichen Schenkel **CB** haben, und deren beide andere Schenkel **BA**, **BD** in gerader Linie liegen, heißen Nebenwinkel; sind zwei Nebenwinkel einander gleich, so heißt jeder davon ein rechter Winkel (Fig. 4.); man sagt dann:

CB stehe auf AB oder DB (und umgekehrt) senkrecht (lothrecht, perpendikulär).

Zus. 1. Zwei Nebenwinkel sind gleich einem geraden Winkel, gleich zwei rechten Winkeln (2R), gleich zwei andern Nebenwinkeln.

Zus. 2. Alle rechten Winkel sind einander gleich.

Zus. 3. Ist von zwei Nebenwinkeln der eine kleiner, als ein rechter (spitz), so ist der andere größer, als ein rechter (stumpf); sie heißen dann schiefe Nebenwinkel.

Zus. 4. Alle Winkel um einen Punkt auf einer Seite einer Geraden sind = 2R.

Zus. 5. Alle Winkel um einen Punkt in einer Ebene sind = 4R.

Zus. 6. Sind zwei oder mehrere Winkel, die einen gemeinschaftlichen Scheitel haben, zusammen = 2R, so liegen ihre äußersten Schenkel in einer Geraden.

§. 8. Erkl. Sind von zwei Winkeln BCD, ACE (Fig. 5). die Schenkel des einen Winkels die Verlängerung der Schenkel des andern Winkels, so heißen diese Winkel beziehungsweise Scheitelwinkel (Vertikalwinkel).

Zus. Scheitelwinkel sind einander gleich; denn da (nach §. 7 Zus. 1.) $\wedge BCD + \wedge DCE = \wedge DCE + \wedge ECA$, so hat man, wenn man beiderseits DCE abzieht: $\wedge BCD = \wedge ACE$.

§. 9. Erkl. Werden zwei Gerade AB, CD (Fig 6) von einer dritten EF geschnitten, so entstehen an jeder der geschnittenen Linien vier Winkel; je zwei dieser acht Winkel erhalten (wenn man von Nebenwinkeln Umgang nimmt), nach ihrer Lage verschiedene Namen, je nachdem sie nemlich zwischen oder außerhalb der geschnittenen, auf einer oder auf verschiedenen Seiten der schneidenden Linie liegen.

Es heißen nemlich y und r, so wie p und q (innere) Wechselwinkel; t und m, s und x (äußere) Wechselwinkel; r und x, q und m, y und s, p und t korrespondirende Winkel (ein innerer und sein äußerer entgegengesetzter); p und r, so wie y und q sind innere (entgegengesetzte)

Winkel, eben so heißen t und x, m und s **äußere entgegengesetzte** Winkel (innere und äußere Gegenwinkel).

Zus. 1. Ist bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden ein Paar Gegenwinkel $= 2R$, so ist jedes Paar Gegenwinkel $= 2R$; sind zwei Wechselwinkel einander gleich, so sind je zwei andere Wechselwinkel einander gleich; und sind zwei korrespondirende einander gleich, so sind je zwei korrespondirende einander gleich; denn ist $p + r = 2R$, so ist, da $x + p = 2R$, und $r + t = 2R$, auch $x + p + r + t = 4R$, woraus wir durch Subtraktion erhalten: $x + t = 2R$ u. s. f.

Zus. 2. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten, und es sind die innern Winkel zusammen $= 2R$, so sind die Wechselwinkel einander gleich, so wie auch die korrespondirenden einander gleich. Denn wenn (Fig. 7.) $0 + x = 2R$, so ist, da $x + q = 2R$ (§. 7. Zus. 1.), auch $0 + x = x + q$; daher $0 = q$; $q = p$ (§. 8. Zus.) daher $0 = q = y$ und s. f.

Zus. 3. Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden die Wechselwinkel gleich, so sind auch die korrespondirenden Winkel einander gleich, und die innern Winkel zusammen $= 2R$.

Zus. 4. Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden die korrespondirenden Winkel gleich, so sind auch die Wechselwinkel gleich, und die innern Winkel zusammen $= 2R$.

§. 10. Erkl. Linien in der Ebene, die sich nicht schneiden, so weit man sie auch verlängern mag, heißen **parallel** (#, oder ++, oder ‡).

§. 11. **Lehrsatz.** Wenn zwei gerade Linien **AB**, **CD** (Fig. 7.) von einer dritten **EF** geschnitten werden, und es sind die innern Winkel zusammen $= 2R$, so sind die Linien **AB** und **CD** parallel.

Dat. $0 + x = 2R$; Thes. $AB \# CD$.

Beweis. Man hat nach §. 9. Zus. 2. $0 = p = q = y$; eben so: $m = x = r = z$.

Nun denke man sich die Fig. 7. durch die Gerade **EF**, ohne daß die Größe der Linien und Winkel geändert wird, in

zwei Theile getheilt (Fig. 8), und lege nun den einen Theil so auf den andern, daß O′ auf R, O′B auf RC falle: so muß O′R′ auf RO (x = r, §. 5. Zus. 2.), und R′ auf O (O′R′ = OR; §. 3. Zus. 3.), und R′D auf OA (0 = q) fallen; ohne daß die Geraden O′B, R′D ihre Lage geändert haben, macht also O′B mit RC, R′D mit OA nur eine gerade Linie; würden sich nun RC und OA gegen CA hin schneiden, so müßten sich auch O′B und R′D in dieser Richtung schneiden; da aber die Lage dieser Linien sich nicht geändert hat, so müßten sich in Fig. 7. AB und CD, sowohl auf Seite von CA, als auf Seite von DB, mithin müßten sich die zwei Geraden auf beiden Seiten zugleich, also in zwei Punkten schneiden, was unmöglich ist; daher können sich AB und CD nicht schneiden, sind also parallel.

Zus. Sind bei zwei von einer dritten geschnittenen Geraden die korrespondirenden, oder die Wechselwinkel einander gleich, so sind die Linien parallel, (Lehrsatz und §. 9. Zus. 4. und Zus. 3.)

§. 12. Grundſ. Werden zwei Gerade von einer dritten geschnitten und es sind die innern Winkel zusammen kleiner, als zwei Rechte, so schneiden sich die zwei Geraden, genugsam verlängert, auf der Seite, wo die erwähnten Winkel liegen.

§. 13. Lehrſ. Werden zwei parallele Linien AB, CD (Fig. 7.) von einer dritten EF geschnitten, so sind:

1. die innern Winkel = 2R; es sind auch
2. die korrespondirenden Winkel und
3. die Wechselwinkel einander gleich.

Dat. AB ♯ CD; **Thes.** $x + 0 = 2R$.

Bew. ad 1. Wäre $x + 0 < 2R$, so müßten die Geraden AB, CD auf dieser Seite sich schneiden (§. 12); wären also nicht parallel, was gegen unsere Voraussetzung ist. Wäre: $x + 0 > 2R$, so hätte man, da

$$(x + q) + (0 + r) = 4R, \text{ und}$$
$$x + 0 > 2R, \text{ wenn man subtrahirt}$$
$$\overline{\quad q + r < 2R.}$$

Die Linien AB, CD müßten sich also auf Seite von r, q schneiden; wären also nicht parallel, was wieder gegen unsere Voraussetzung ist; da nun x + 0 weder größer noch kleiner als zwei Rechte seyn können, so sind sie = 2R.

Bew. ad 2. und 3. folgt aus Beweis 1. mit Rücksicht auf §. 9, Zus. 3. Zus. 4.

§. 14. Lehrs. Durch einen Punkt O gibt es in einer Ebene mit einer gegebenen Geraden CD nur eine (Fig. 9) Parallele AB. Denn es sey auch KL durch O mit CD parallel; man ziehe durch O die EF so, daß sie die CD in R schneidet, so ist $\wedge$ EOB = $\wedge$ ERD (§. 13. 2.); wäre nun auch KL # CD; so müßte: $\wedge$ EOL = ERD seyn; daher $\wedge$ EOL = = EOB, was unmöglich ist; daher KL auch nicht parallel mit CD.

§. 15 Folgesätze. 1. Schneidet eine Gerade EF (Fig. 7.) die eine CD von zwei Parallelen AB, CD, so schneidet sie, genugsam verlängert, auch die andere AB; denn schnitte sie die AB nicht, so wäre sie der AB parallel; wir hätten also durch einen Punkt R zu AB zwei Parallelen FE, CD (gegen §. 14.)

2. Sind zwei Gerade CD, KL (Fig. 10) einer dritten AB parallel, so sind sie auch unter sich parallel. Man ziehe nemlich EF so, daß sie die AB schneidet, so muß sie auch die CD und KL schneiden (1). Nun ist x = m; x = q (§. 13. 2.); daher m = q; also CD # KL (§. 11. Zus.)

3. Steht eine Gerade auf zwei andern Geraden zugleich senkrecht, so sind diese parallel; oder stehen zwei Gerade auf einer dritten senkrecht, so sind die zwei Geraden parallel.

4. Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Geraden senkrecht, so steht auch die andere senkrecht; oder steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelen senkrecht, so steht sie auch senkrecht auf der andern.

§. 16. Lehrs. Sind die Schenkel zweier Winkel beziehungsweise parallel, und haben sie rücksichtlich der ihre Scheitel verbindenden Geraden gleiche Richtung, so sind die Winkel gleich. (Fig. 11.)

Dat. CA # DE; BA # FE; Thes. $\wedge$ CAB = $\wedge$ DEF.

Bew. Man ziehe durch die Scheitel der Winkel die Gerade KL, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\wedge KAB = \wedge KEF \\ \wedge KAC = \wedge KED\end{array}\right\}\ (\S.\ 13.\ 2.)$$

also: $\wedge CAB = \wedge DEF$.

§. 17. Erkl. Schneiden sich mehrere Linien so, daß sie eine Ebene allseitig begrenzen, so heißt die so begrenzte Ebene eine Figur. Die begrenzenden Linien heißen Seiten, die ganze Grenze der Figur Umfang (Perimeter.) Der Durchschnittspunkt je zweier Seiten heißt Eck. Die Gerade, welche zwei Ecke verbindet (ohne mit einer Seite zusammenzufallen) heißt Diagonale.

Zus. 1. Zur Begrenzung einer Ebene werden wenigstens drei Gerade erfordert.

Zus. 2. Die Anzahl der Ecke und Seiten einer Figur ist immer gleich.

Zus. 3. Eine Gerade, die einen Punkt innerhalb, und einen Punkt außerhalb einer Figur hat, schneidet bei genugsamer Verlängerung den Perimeter der Figur wenigstens in zwei Punkten.

Zus. 4. Haben zwei Figuren eine solche Lage, daß die eine Figur einen Punkt ihres Perimeters innerhalb und einen Punkt außerhalb des Perimeters der andern Figur hat, so schneiden die Perimeter sich wenigstens in zwei Punkten.

Zus. 5. Die Anzahl der Diagonalen eines n Ecks ist: $\frac{n \cdot (n-3)}{2}$.

§. 18. Erkl. Eine Figur heißt regulär, wenn sie lauter gleiche Seiten und gleiche Winkel hat; außerdem irregulär.

§. 19. Erkl. Figuren heißen Dreiecke, Vierecke oder Vielecke (Polygone), je nachdem sie drei, vier oder mehr als vier Seiten haben.

Das Dreieck heißt gleichseitig, gleichschenklich oder ungleichseitig, je nachdem es drei gleiche, zwei gleiche, oder lauter ungleiche Seiten hat. Jene Seite, auf der man sich das

Dreieck gestellt denkt, heißt Basis (Grundlinie, Grundseite). Das der Basis gegenüberliegende Eck heißt Spitze des Dreiecks. Im gleichschenklichen Dreiecke versteht man unter Basis immer die ungleiche Seite.

Eine senkrechte von der Spitze auf die Basis heißt Höhe des Dreiecks.

§. 20. Lehrs. Verlängert man eine Dreiecksseite, so ist der durch die Verlängerung der Seite außerhalb des Dreiecks entstehende Winkel (Außenwinkel) gleich den beiden ihm gegenüber liegenden Winkeln des Dreiecks. (Fig. 12.)

$$\text{Thes. } \wedge BCD = 0 + x.$$

Bew. Durch C sey CE mit AB parallel gezogen; so hat man:

$$q = x \; (\text{§ } 13.\ 3.)$$
$$y = 0 \; (\text{§. } 13.\ 3.)$$

daher auch $q + y = 0 + x$; d. i. $\wedge BCD = 0 + x$

Zus. 1. Der Außenwinkel ist also größer, als jeder einzelne der ihm gegenüberliegenden Winkel des Dreiecks.

Zus. 2. Die Summe aller Winkel eines Dreiecks ist $= 2R$; denn da: $0 + x = \wedge BCD$ (Lehrs.) und

$$p = p; \text{ so ist}$$
$$0 + x + p = \wedge BCD + p = 2R.$$

Zus. 3. Im Vierecke sind alle Winkel $= 4R$; denn theilt man dasselbe durch eine Diagonale in zwei Dreiecke (Fig. 13)., so ist die Summe der Winkel eines jeden Dreiecks $= 2R$; da nun die Winkel beider Dreiecke den Winkeln des Vierecks gleich sind, so ist die Summe aller Winkel des Vierecks $= 4R$

Zus. 4. In jedem n Ecke ist die Summe aller Winkel $= 2R(n - 2)$; in jedem regulären n Ecke ist also der Polygonswinkel =

$$\frac{2R\,(n - 2)}{n}$$

Die Außenwinkel einer jeden Figur sind $= 4R$.

Zus. 5. Sind in einem Dreiecke zwei Winkel bekannt, so ist auch der dritte dadurch gegeben.

Zus. 6. Ein Dreieck kann nicht mehr als einen rechten oder stumpfen Winkel enthalten. Man theilt deßwegen die Dreiecke in rechtwinkliche, stumpfwinkliche und spitzwinkliche ein, je nachdem sie einen rechten, stumpfen, oder lauter spitze Winkel haben. Im rechtwinklichen Dreiecke heißt die Seite, welche dem rechten Winkel gegenüber liegt, Hypotenuse; die den rechten Winkel einschließenden Seiten heißen Katheten.

Zus. 7. Im rechtwinklichen Dreiecke sind die beiden spitzen Winkel $= R$; im stumpfwinklichen sind die beiden spitzen Winkel $< R$.

Zus. 8. Liegt im stumpfwinklichen Dreiecke der stumpfe Winkel an der Basis, so fällt die Höhe über das Dreieck hinaus; im rechtwinklichen Dreiecke fällt die Höhe mit einer Kathete zusammen, wenn der rechte Winkel an der Basis liegt; in allen übrigen Fällen fällt die Höhe in das Dreieck.

§. 21. Erkl. Ein Viereck heißt Parallelogramm, wenn je zwei gegenüberliegende Seiten einander parallel sind; Trapez, wenn bloß ein Paar Seiten einander parallel sind; § 33
Trapezoid, wenn keine Seite der andern parallel ist. (Das Trapez heißt manchmal auch Parallel-Trapez; in diesem Falle dann erhält das Trapezoid den Namen Trapez).

Zus. 1. Im Parallelogramm sind die gegenüberstehenden Winkel einander gleich; denn (Fig. 13.) wenn $AC \# BD$, so ist

$$CAB + DBA = 2R; \text{ ist } AB \# CD,$$

$$\text{so ist } DBA + CDB = 2R; \text{ daher}$$

$$CAB + DBA = DBA + CDB; \text{ da nun}$$

$$DBA = DBA, \text{ so ist}$$

$$\wedge CAB = \wedge CDB, \text{ eben so ist auch}$$

$$\wedge ABD = \wedge ACD.$$

Zus. 2. Ist im Parallelogramm ein Winkel ein rechter, so sind alle Winkel rechte.

Zus. 3. Sind in einem Vierecke je zwei gegenüberliegende Winkel einander gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. 22. Erkl. Wird eine Ebene von einer krummen Linie so begrenzt, daß alle Punkte der krummen Linie von einem Punkte gleichweit entfernt sind, so heißt diese begrenzte Ebene Kreis (Fig. 14.), der Punkt C, von dem alle Punkte der krummen Linie gleichweit abstehen, heißt Mittelpunkt (Centrum); die krumme Linie heißt Peripherie; ein Theil der Peripherie, z. B. DF heißt Kreisbogen; eine Gerade CD vom Mittelpunkte zu einem Punkte der Peripherie heißt Radius (Halbmesser); eine Gerade AB, die zwei Punkte der Peripherie verbindet, heißt Sehne; geht die Sehne z. B. EF durch den Mittelpunkt, so heißt sie Diameter (Durchmesser); eine Ebene begrenzt von zwei Radien CD, CF, und einem Kreisbogen DF heißt Sektor (Kreisausschnitt); eine Ebene, von einer Sehne AB und einem Bogen begrenzt, heißt Kreisabschnitt (Segment). Sekante heißt eine über den Kreis hinaus verlängerte Sehne GH; fallen die zwei Durchschnittspunkte der Sekante mit der Peripherie in einen Punkt zusammen, so heißt sie Tangente (MN).

Zus. 1. Alle Radien desselben Kreises sind einander gleich.

Zus. 2 Der Diameter ist gleich zwei Radien; daher auch die Diameter desselben Kreises einander gleich.

Zus. 3. Kreise mit gleichen Radien sind kongruent und umgekehrt.

Zus. 4. Der Diameter theilt den Kreis in zwei kongruente Theile (Halbkreise); denn legt man den Theil EDF (Fig. 14.) auf den Theil EOF, so müssen, da EF beiden Figuren gemeinschaftlich ist, alle Punkte des einen Halbkreises auf die Punkte des andern Halbkreises fallen, weil außerdem die Radien ungleich wären.

Zus. 5. Eine Gerade, die vom Mittelpunkte eines Kreises ausgeht, ist dem Radius gleich, oder größer, oder kleiner als der Radius, je nachdem ihr Endpunkt in, oder außerhalb, oder innerhalb der Peripherie des Kreises liegt, und umgekehrt.

Anmerk. Der Kreis ist die einzige krummlinige Figur, die in der ebenen Geometrie betrachtet wird.

§. 23. Erkl. Kreise, die denselben Mittelpunkt haben, heißen concentrisch; haben sie verschiedene Mittelpunkte, so sind sie excentrisch. Die Gerade, welche die Mittelpunkte von zwei excentrischen Kreisen verbindet, heißt Centrallinie.

Zweiter Abschnitt.

Kongruenz der Figuren.

§. 24. Erkl. Kongruente geometrische Größen (nach §. 1.) sind solche, die bei gehöriger Lage sich decken; in kongruenten Figuren müssen also alle Seiten und Winkel der Ordnung nach gleich seyn. Die Fälle, in welchen aus der Gleichheit mehrerer Stücke (Seiten und Winkel) zweier Figuren die Gleichheit der übrigen Stücke nothwendig erfolgt, also dadurch die Kongruenz der Figuren bedingt wird, heißen Kongruenzfälle oder Kriterien der Kongruenz.

§. 25. Lehrsatz. (I. Kongruenzfall.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten und den von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich haben; d. i. (**Fig. 15.**)

Dat. $AB = DE$; $BC = EF$; $\wedge ABC = \wedge DEF$.

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wir legen $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$, daß **B** auf **E** und **BA** auf **ED** zu liegen kommt; so muß **A** auf **D** (§. 3 Zus. 3.), **BC** auf **EF** (§. 5. Zus. 2.), und **C** auf **F** (§. 3. Zus. 3.); mithin auch **AC** auf **DF** fallen (§. 3. Grdsß.); die Dreiecke decken sich also, sind kongruent.

Zus. 1. Da **AC** und **DF** sich decken, so sind sie gleich; da $\wedge$ **BAC** und **EDF** sich decken, sind sie gleich; eben so decken sich $\wedge$ **BCA** und $\wedge$ **EFD**, sind also auch gleich; wenn also aus den gegebenen gleichen Stücken zweier Dreiecke die Kongruenz derselben erwiesen ist, so folgt die Gleichheit der übrigen Stücke, und zwar liegen in kongruenten Dreiecken gleiche Seiten gleichen Winkeln, und gleiche Winkel gleichen Seiten gegenüber.

Zus. 2. Zwei rechtwinkliche Dreiecke sind kongruent, wenn sie die zwei Katheten beziehungsweise gleich haben.

§. 26. Lehrsatz. Im gleichschenklichen Dreiecke sind die Winkel an der Grundlinie gleich; d. i. (Fig. 17.) **Dat.** $BA = BC$; **Thes.** $\wedge BAC = \wedge BCA$.

Bew. Von der Spitze B sey die Gerade BD so gezogen, daß sie den Winkel ABC halbirt; dann hat man: $\wedge ABD = \wedge CBD$ (hypoth.), $BA = BC$ (Dat.) und $BD = BD$; daher $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (I.); also auch $\wedge BAD = \wedge BCD$, (§. 25. Zus. 1.) oder $\wedge BAC = \wedge BCA$ (§. 5. Zus. 1.).

Zus. 1. Aus der Kongruenz der $\triangle\triangle$: BAD, BCD folgt überdieß: $AD = CD$; $\wedge ADB = \wedge CDB = R$, d. h. eine Gerade, die den Winkel an der Spitze eines gleichschenklichen Dreieckes halbirt, halbirt verlängert auch die Grundlinie, und steht auf ihr senkrecht.

Zus. 2. Im gleichseitigen Dreiecke sind alle Winkel einander gleich. Das gleichseitige Dreieck ist also eine reguläre Figur.

Zus. 3. Wenn im gleichschenklichen Dreiecke ein Winkel bekannt ist, so sind auch die übrigen bekannt; im gleichseitigen Dreiecke ist jeder Winkel $= \frac{2}{3} R$.

§. 27. Lehrs. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehungsweise einander gleich, die von diesen Seiten eingeschlossenen Winkel aber ungleich, so sind die den ungleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten ungleich; d. h. dem kleinern Winkel liegt die kleinere Seite gegenüber; d. i. (Fig. 18.)

Dat. $AB = DE$; $BC = EF$; $\wedge ABC < \wedge DEF$.

Thes. $AC < DF$.

Bew. Wir legen $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$, daß B auf E, BA auf ED falle, so muß A auf D fallen (§. 3. Zus. 3.); BC aber fällt zwischen ED und EF (§. 5. Anmerk.). Nun kann C entweder 1) in die Gerade DF, oder 2) in das Dreieck DEF, oder 3) über das Dreieck DEF hinausfallen.

Bew. ad 1.) In diesem Falle ist offenbar $AC < DF$ (als Theil des Ganzen).

Bew. ad 2.) (Fig. 18. a.) Wir verlängern BC, bis sie DF in G schneidet, so hat man:

$$\left.\begin{array}{r} AC < DG + GC \\ BC + CG < EF + FG, \end{array}\right\}$$ (§. 3. Grundſ.) daher addirt

$$BC + CG + AC < DG + GC + EF + FG;$$
$$CG \quad = \quad GC$$
$$- \qquad -$$

$$BC + AC < DG + EF + FG,$$ oder
$$BC + AC < DF + EF;$$ da aber (Dat.)
$$BC = EF,$$ ſo iſt auch:
$$- \qquad -$$

$$AC < DF.$$

Bew. ad 3. (Fig. 18. b.); BC und DF ſchneiden ſich in M: wir haben nun:

$$\left.\begin{array}{r} AC < DM + MC \\ EF < BM + MF \end{array}\right\}$$ (§. 3. Grundſ.) daher

$$AC + EF < DM + MC + BM + MF;$$ oder
$$AC + EF < DF + BC;$$ da nun (Dat.)
$$EF = BC;$$ ſo iſt
$$- \qquad -$$

$$AC < DF.$$

Zuſ. Sind in zwei Dreiecken zwei Seiten beziehungsweiſe gleich, die dritten Seiten aber ungleich, ſo liegt der kleinern Seite auch der kleinere Winkel gegenüber; d. i. (Fig. 18.), wenn $AB = DE$; $BC = EF$; $AC < DF$; ſo iſt $\angle ABC < \angle DEF$; denn wäre Winkel $ABC = \angle DEF$, ſo wäre $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (I.), daher auch $AC = DF$, gegen unſere Vorausſetzung.

Wäre $\angle ABC > \angle DEF$, ſo wäre nach Lehrſatz $AC > DF$, wieder gegen unſere Vorausſetzung; da nun AC weder größer noch gleich DF ſeyn kann, ſo muß ſie kleiner ſeyn.

§. 28. Lehrſ. (II. Kongruenzfall.) Sind in zwei Dreiecken alle Seiten beziehungsweiſe gleich, ſo ſind die Dreiecke kongruent; d. i. (Fig. 15.)

Dat. $AB = DE$, $BC = EF$, $AC = DF$.

Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Es iſt $\angle ABC = \angle DEF$; denn wäre $\angle ABC$ nicht gleich $\angle DEF$, ſo könnte $\angle ABC < \angle DEF$ ſeyn; da nun (Dat.) $AB = DE$, $BC = EF$, ſo müßte $AC < DF$ ſeyn, was gegen unſere Vorausſetzung iſt; wäre $\angle ABC > \angle DEF$, ſo

wäre aus demselben Grunde $AC > DF$, wieder gegen unsere Voraussetzung; es ist also $\wedge ABC = \wedge DEF$, und da $AB = DE$; $BC = EF$, so ist $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (I.)

Zus. Ist im Dreiecke ABC (Fig. 17.) $BA = BC$, und man macht $DA = DC$ und zieht DB, so ist $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (Lehrsatz), daher auch $\wedge ABD = \wedge CBD = \frac{1}{2} ABC$, und $\wedge ADB = \wedge CDB = R$; d. h. eine Gerade, die im gleichschenklichen Dreiecke von der Spitze aus gezogen die Grundlinie halbirt, halbirt auch den Winkel an der Spitze, und steht auf der Grundlinie senkrecht.

§. 29. Lehrsatz. (III. Kongruenzfall) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie eine Seite und zwei gleichliegende Winkel beziehungsweise gleich haben. Die beiden als gleich gegebenen Winkel können 1. der gegebenen Seite anliegen; oder es kann 2. der eine Winkel ihr anliegen, der andere ihr gegenüberliegen, d. h. ad 1. (Fig. 15.)

Dat. $AC = DF$; $\wedge BAC = \wedge EDF$; $\wedge BCA = \wedge EFD$:
Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Wir legen $\triangle ABC$ so auf $\triangle DEF$, daß A auf D, AC auf DF falle; so muß C auf F fallen (§. 3. Zus. 3.); es muß AB auf DE, und CB auf FE fallen (§. 5. Zus. 2.); folglich auch B auf E (§. 3. Zus. 1.), mithin decken sich die Dreiecke.

ad 2. Dat. $AC = DF$, $\wedge BAC = \wedge EDF$; $\wedge ABC = \wedge DEF$:
Thes. $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

Bew. Da nach §. 20. Zus. 5. $BCA = EFD$ ist, so haben wir $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ nach 1.

Zus. 1. Zwei rechtwinkliche $\triangle\triangle$ sind kongruent, wenn sie einen spitzen Winkel, und dazu noch die Hypotenuse, oder eine Kathete beziehungsweise gleich haben.

Zus. 2. (Fig. 17.) Ist im Dreiecke ABC: $\wedge BAC = \wedge BCA$, und man zieht BD senkrecht von B auf AC; so ist: $\wedge BAD = \wedge BCD$ (Dat.), $\wedge BDA = \wedge BDC = R$ (hyp.); $BD = BD$; daher $\triangle ABD \cong \triangle CBD$ (Lehrs.), mithin auch $AB = BC$, d. h.:

Sind in einem Dreiecke zwei Winkel gleich, so sind auch die diesen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich; also das Dreieck gleichschenklich.

Zus. 3. Aus Zus. 2 folgt, daß jenes Dreieck gleichseitig sey, welches lauter gleiche Winkel hat.

Zus. 4. Da △ABD ≌ △CBD (Zus. 2), also ∧ABD = ∧CBD = ½ABC, und AD = DC = ½AC; so folgt, daß eine Senkrechte, welche von der Spitze auf die Grundlinie eines gleichschenklichen Dreieckes gezogen wird, den Winkel an der Spitze und die Grundlinie halbire.

§ 30. Lehrs. (IV. Kongruenzfall.) Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie zwei Seiten, und ein Paar Winkel, die den einen dieser als gleich angenommenen Seiten gegenüber liegen, beziehungsweise gleich haben; die den andern gegebenen Seiten gegenüberliegenden Winkel aber zusammen nicht gleich sind zwei rechten Winkeln. (Fig. 15.)

Dat. **BA = ED; BC = EF; ∧ BAC = ∧ EDF; ∧ BCA + ∧ EFD $\gtrless$ 2R.**

Thes. **△ ABC ≌ △ DEF.**

Bew. Man lege △**BAC** so auf △**EDF**, daß **A** auf **D**, **AB** auf **DE** fällt, so muß **B** auf **E** fallen, (§. 3. Zus. 3.) und **AC** auf **DF**; (§. 5. Zus. 2.) es muß aber auch **C** auf **F**, mithin **BC** auf **EF** fallen; daher decken sich die Dreiecke. Denn fiele **C** nicht auf **F**, so könnte es nur 1) zwischen **D** und **F**, oder 2) in die Verlängerung von **DF** fallen.

Bew. ad 1. (Fig. 19. a.) Man hat **BC = EF** (Dat.), also ∧ **BCF** = ∧ **EFC** (§. 26. Lehrs.); es ist aber:

∧ **BCF** + ∧ **BCA** = 2R (§. 7. Zus. 1.); daher

∧ **EFC** + ∧ **BCA** = 2R; oder

∧ **EFD** + ∧ **BCA** = 2R gegen unsere Voraussetzung.

Bew. ad 2. (Fig. 19. b.) Es ist **BC = EF** (Dat.); also

∧ **BFC** = **BCF** (§. 26.); nun ist

∧ **BFC** + ∧ **EFD** = 2R; daher

∧ **BCF** + ∧ **EFD** = 2R; oder

∧ **BCA** + ∧ **EFD** = 2R; was wieder gegen unsere Vor-

aussetzung ist; C muß also auf F fallen, da es weder zwischen D und F, noch in die Verlängerung von DF fallen kann.

Zus. Zwei rechtwinkliche Dreiecke sind kongruent, wenn sie beziehungsweise die Hypotenuse und eine Kathete gleich haben.

Anmerk. Bei den vier Kongruenzfällen haben wir in zwei Dreiecken das zunächst berücksichtigt, was gleich gegeben seyn muß, um ihre Kongruenz zu bedingen; würde man aber berücksichtigen, welche Stücke nicht gleich gegeben seyn müssen, so könnte man den ersten Kongruenzfall folgendermassen darstellen. Zwei Dreiecke sind kongruent, wenn sie alle Seiten und Winkel gleich haben, mit Ausnahme von ein Paar Seiten und den dieser Seite anliegenden Winkeln; auf ähnliche Weise lassen sich die noch übrigen Fälle darstellen. Dadurch können diese Kongruenzfälle auf zwei Polygone von gleicher Seitenzahl ausgedehnt werden. (Fig. 16) Zwei Polygone von gleicher Seitenzahl sind demnach kongruent, wenn sie alle Seiten und Winkel der Ordnung nach gleich haben, bis auf ein Paar Seiten, und den diesem Seitenpaare anliegenden Winkeln (I); u. s. w.

§. 31. Lehrs. In jedem Dreiecke steht der größern Seite auch der größere Winkel gegenüber; d. i. (Fig. 20.)

Dat. $AC > AB$;

Thes. $\wedge ABC > ACB$.

Bew. Auf AC nehmen wir $AD = AB$, und ziehen die Gerade DB, so ist:

$\wedge ADB = \wedge ABD$ (§. 26.)

$\wedge ADB > \wedge ACB$ (§. 20. Zus. 1.)

daher: $\wedge ABD > \wedge ACB$; da aber

$\wedge ABD < \wedge ABC$; so ist

$\wedge ABC > \wedge ACB$

Zus. 1. In jedem Dreiecke steht dem größern Winkel auch die größere Seite gegenüber; wenn also (Fig. 20.) $\wedge ABC > \wedge ACB$, so ist $AC > AB$; denn wäre $AC = AB$, so wäre $\wedge ABC = \wedge ACB$ (§. 26.) gegen unsere Voraussetzung; wäre $AC < AB$, so müßte nach Lehrsatz $\wedge ABC < \wedge ACB$ seyn, wieder gegen unsere Annahme; daher muß $AC > AB$ seyn.

Zus. 2 Nach Zus. 1. ist im rechtwinklichen Dreiecke die Hypotenuse die größte Seite; im stumpfwinklichen aber die dem stumpfen Winkel gegenüberliegende.

§. 32. Lehrs. Durch eine Diagonale wird ein Parallelogramm in zwei kongruente Dreiecke getheilt; (Fig. 13.)

Dat. AB ♯ CD; AC ♯ BD;

Thes. △ABC ≌ △DBC.

Bew. BC = BC; ∧ACB = CBD; ∧ABC = ∧BCD (§. 13. 3.) daher △ABC ≌ BCD (III.)

Zus. 1. Aus der Kongruenz folgt, daß AC = BD; AB = CD; d. h. in jedem Parallelogramm sind die gegenüberliegenden Seiten einander gleich; oder Parallelen zwischen Parallelen sind gleich.

Zus. 2. Es sind daher auch alle Perpendikel gleich, die man von einer Seite eines Parallelogramms auf die gegenüberstehende Seite errichtet. (§. 15. 3.)

Zus. 3. Sind in einem Vierecke zwei gegenüberstehende Seiten gleich und parallel, so ist das Viereck ein Parallelogramm (Fig. 13.); wenn AC ♯ BD, so ist auch BA ♯ CD; denn wenn man die Diagonale BC zieht, so ist △BAC ≌ △BDC (I.) u. s. f.

Zus. 4. Sind in einem Vierecke die gegenüberstehenden Seiten einander gleich, so ist das Viereck ein Parallelogramm (Fig. 13.); wenn AB = CD; AC = BD: so ist AB ‡ CD; AC ‡ BD; denn zieht man die Diagonale AC, so ist △BAC ≌ △BDC (II.) u. s. f.

Zus. 5. Im Parallelogramme halbiren sich die Diagonalen gegenseitig; und wenn sich im Vierecke die Diagonalen halbiren, so ist das Viereck ein Parallelogramm.

§. 33. Erkl. Ein rechtwinkliches Parallelogramm heißt

1. Ein Quadrat, wenn zwei anliegende Seiten einander gleich sind; daher sind im Quadrate nach (§. 21. Zus. 2. §. 32. Zus. 1.) alle Seiten und Winkel gleich; es ist also das Quadrat eine reguläre Figur.

2. Ein Rechteck, wenn zwei anliegende Seiten ungleich sind.

Ein schiefwinkliches Parallelogramm heißt

1. Rhombus (Raute), wenn zwei anliegende Seiten gleich sind; im Rhombus sind also alle Seiten gleich.

2. Rhomboid, wenn zwei anliegende Seiten ungleich sind.

Zus. Im rechtwinklichen Parallelogramme (Quadrat und Rechteck) sind die Diagonalen einander gleich, und umgekehrt; im gleichseitigen Parallelogramm (Quadrat und Rhombus) stehen die Diagonalen aufeinander senkrecht, und umgekehrt.

§. 34. Lehrs. Zwei Parallelogramme sind kongruent, wenn sie zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel beziehungsweise gleich haben.

Bew. Nach §. 21. Zus. 1. und §. 32 Zus. 1. folgt, daß in beiden Parallelogrammen alle Seiten und Winkel beziehungsweise gleich sind, also die Figuren bei gehöriger Lage sich decken müssen.

Zus. Zwei Quadrate sowie zwei reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl sind kongruent, wenn sie eine Seite beziehungsweise gleich haben. Zwei Rechtecke sind kongruent, wenn sie zwei anliegende Seiten beziehungsweise gleich haben. Zwei Rhomben sind kongruent, wenn sie eine Seite und einen Winkel beziehungsweise gleich haben.

Anhang

zum ersten und zweiten Abschnitte.

§. 35. Aufgaben. 1. Ueben einer gegebenen Geraden AB ein gleichseitiges Dreieck zu construiren. (Fig. 21.)

Auflösung. Beschreibe aus A mit dem Halbmesser AB einen Kreis; beschreibe aus B mit dem Halbmesser BA einen Kreis; beide Kreise schneiden sich in C (und D); ziehe die Geraden CA, CB, so ist CAB das verlangte gleichseitige Dreieck; (eben so DAB).

Bew. $AB = AC$ (§. 22. Zus. 1.); $AB = BC$; daher

$$AB = AC = BC.$$

Vorerst aber ist zu zeigen, daß sich die beiden Kreise schneiden; nemlich zwei Kreise schneiden sich in zwei Punkten, wenn ihre Radien und die Centrallinie so beschaffen sind, daß

zwei dieser drei Stücke zusammengenommen immer größer sind, als das dritte (d. i. Fig. 22.)

Dat. { 1. CB + CA > AD
2. CA + AD > CB
3. CB + AD > CA.

Thes. Die Peripherien schneiden sich in zwei Punkten.

Bew. Wir verlängern die CA nach E und F, und es ist
CB + CA > AD (Dat. 1.); oder
CF + CA > AD; (§. 22. Zus. 1.)
FA > AD.

Daher liegt F (ein Punkt der Peripherie des Kreises um C) außerhalb der Peripherie des Kreises um A. (§. 22. Zus. 5.)

Man hat ferner: AD + CA > CB (Dat. 2.); oder
AE + CA > CB; d. i.
CE > CB.

Mithin liegt B zwischen C und E.

Nun kann B rücksichtlich D drei Lagen haben; es kann: a) mit D zusammenfallen, oder: b) zwischen D und C; oder c) zwischen D und E fallen.

Die Lagen a) und b) können nicht statt finden, weil im ersten Falle die Centrallinie gleich den beiden Radien wäre; im zweiten Falle wäre die Centrallinie größer als die beiden Radien (gegen die Annahme); daher fällt B zwischen D und E; also auf den Durchmesser des um A beschriebenen Kreises; mithin innerhalb der Peripherie dieses Kreises. Die Peripherie des Kreises um C hat also einen Punkt F außerhalb, und einen Punkt B innerhalb der Peripherie des Kreises um A; folglich schneiden sich die Peripherien in zwei Punkten. Da nun in der Aufgabe die Centrallinie und die beiden Radien gegenseitig einander gleich sind, so müssen offenbar zwei dieser Linien größer seyn, als die dritte: folglich schneiden sich die Peripherien in C und D.

Zus. Um über einer gegebenen Geraden ein gleichschenkliches Dreieck zu beschreiben, nimmt man die Radien der zu beschreibenden Kreise gleich, aber von solcher Größe, daß ein Radius größer, als die halbe Grundlinie ist.

Anmerk. Man hat nicht nöthig, die Kreise vollständig zu beschreiben; zwei sich schneidende Bogen reichen hin.

2. Einen gegebenen Winkel halbiren.

Aufl. (Fig. 23.) Der gegebene Winkel sey ACB. Aus dem Scheitel C beschreibe man mit einem beliebigen Halbmesser einen Kreisbogen, der die Schenkel CA, CB des Winkels beziehungsweise in D, E schneidet; ziehe DE; über DE errichte das gleichschenkliche Dreieck DFE; ziehe die Gerade FC, so halbirt diese den gegebenen Winkel.

Bew. $CD = CE$; $DF = EF$ (ex construct.);
$CF = CF$; daher $\triangle DCF \cong \triangle ECF$ (II);
daher auch $\wedge DCF = \wedge ECF$; oder
$\wedge ACF = BCF = \frac{1}{2} \wedge ACB.$

3. Eine gegebene Gerade durch eine Senkrechte halbiren.

Aufl. (Fig. 17) Ueber der gegebenen Geraden AC beschreibe das gleichschenkliche Dreieck ACB; halbire den Winkel ABC durch die Gerade BD, so halbirt diese die AC senkrecht.

Bew. $AB = BC$ (ex construct.); $BD = BD$; $\wedge ABD = \wedge CBD$ (ex constr.); daher $\triangle ABD \cong \triangle BCD$ (I.); mithin $AD = CD = \frac{1}{2}AC$; und da $\wedge ADB + \wedge BDC = 2R$; und $\wedge ADB = \wedge BDC$: so ist $\wedge ADB = BDC = R.$

4. Durch einen Punkt eine Gerade ziehen, die auf einer gegebenen Geraden senkrecht steht. Je nachdem der gegebene Punkt: a) in der gegebenen Geraden, oder b) außerhalb derselben liegt, haben wir zwei Auflösungen.

Auflös. ad a. (Fig. 24) Aus dem gegebenen Punkte C beschreibe man mit einem Halbmesser einen Kreis, der die gegebene Gerade AB in den Punkten D und E schneidet; beschreibe über DE das gleichschenkliche Dreieck DFE; ziehe FC; so steht diese durch C auf AB senkrecht.

Bew. $DF = EF$; $DC = EC$ (ex constr.); $FC = FC$; daher $\triangle DCF \cong \triangle ECF$ (II); also auch $\wedge DCF = \wedge ECF = R.$

Auflös. ad b Aus dem gegebenen Punkte F (Fig. 24.) beschreibe man mit einem Halbmesser von hinlänglicher Größe einen Kreisbogen, der die gegebene AB in den Punkten D und

E schneidet; ziehe FE, FD; halbire den Winkel DFE durch die Gerade FC; so steht diese durch F auf AB senkrecht.

Bew. DF = FE (ex constr.); FC = FC; $\angle DFC = \angle EFC$ (ex constr.); daher $\triangle DFC \cong \triangle EFC$ (I.); mithin auch $\angle DCF = \angle ECF = R$.

Zus. 1. Durch einen Punkt C (Fig. 24.) einer Geraden AB gibt es auf dieser nur eine Senkrechte FC; denn sey auch CK durch C auf AB senkrecht; so wäre $\angle KCB = R$; aber auch $\angle FCB = R$; mithin $\angle KCB = \angle FCB$; was unmöglich ist.

Zus. 2. Durch einen Punkt F außerhalb der Geraden AB gibt es auf diese nur eine Senkrechte; denn wäre auch FE senkrecht auf AB, so wäre $\angle FEC = R$; aber auch $\angle FCE = R$; mithin hätte man im Dreiecke CFE zwei rechte Winkel, was unmöglich ist. (§. 20. Zus. 6.)

Zus 3. Die senkrechte von einem Punkte auf eine Gerade ist unter allen Linien die kürzeste, und umgekehrt.

Zus. 4. In einer Geraden gibt es nicht mehr als zwei Punkte, die von einem außerhalb der Geraden liegenden Punkte gleichweit abstehen.

5. Einen Winkel verzeichnen, der einem gegebenen Winkel gleich ist.

Auflös. (Fig. 25.) Sey BAC der gegebene Winkel, welcher an die Gerade KL verzeichnet werden soll. Beschreibe aus A einen Kreisbogen, der die AB, AC beziehungsweise in F, D schneidet; ziehe FD. Aus K beschreibe man mit AD = AF einen Kreisbogen, der die KL schneidet in M, und der von einem aus M mit dem Halbmesser DF beschriebenen Kreise geschnitten wird in O; ziehe OK; so ist $\angle OKM$ der verlangte Winkel.

Bew. AF = AD = KM = KO (constr.); DF = MO (ex constr.); daher $\triangle FAD \cong \triangle OKM$ (II.); also $\angle FAD = \angle OKM$; oder $\angle BAC = \angle OKM$.

6. Durch einen Punkt C eine Gerade ziehen, die der gegebenen Geraden AB parallel ist. (Fig. 26.)

Auflös. Durch C ziehe man die Gerade DE so, daß sie die AB in F schneidet; man verzeichne nun an DC den Winkel $DCK = \angle DFB$; so ist CK ‡ AB.

Bew. Da ex constr. $\wedge$DCK = $\wedge$DFB, diese Winkel aber correspondirende sind, so ist CK ‡ FB (§. 11. Zus.)

7. Aus zwei gegebenen Geraden und dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ein Parallelogramm zu verzeichnen. (Fig. 27.)

Auflös. Die gegebenen Geraden seyen BA, BC, die den gegebenen Winkel ABC einschließen. Beschreibe aus A mit dem Radius BC, und aus C mit dem Radius BA Kreise, so werden sich diese schneiden in D; ziehe die Geraden AD, CD, so ist AC das verlangte Parallelogramm.

Bew. Da ex constr. AB = CD; BC = AD, so ist (§. 32. Zus.) BD ein Parallelogramm, und das Verlangte, weil es die gegebenen Seiten und den gegebenen Winkel enthält.

Zus. Auf ähnliche Art läßt sich aus zwei Seiten ein Rechteck; aus einer Seite und einem Winkel ein Rhombus construiren.

8. Ueber einer gegebenen Geraden ein Quadrat verzeichnen. (Fig. 28.)

Auflös. Auf der gegebenen Geraden nehme man die beliebige AC, und verzeichne über AC das gleichschenkliche Dreieck AEC, verlängere CE bis F, so daß EF = EC = AE wird; ziehe AF, die man bis G verlängert, so daß AG = AB wird; durch G ziehe GK parallel mit AB; durch B die BK parallel mit AG; diese schneiden sich in K; nun ist AK das verlangte Quadrat.

Bew. AE = EC (constr.) daher x = y; ebenso
AE = EF (constr.) daher q = m; aber
$x + y + m + q = 2R$; oder
$x + x + m + m = 2R$; also $2x + 2m = 2R$; daher
$x + m = GAB = R$; da nach der Construktion GK ‡ AB; BK ‡ AG, so ist AK ein Parallelogramm; da auch AG = AB (ex constr.), so ist AK das verlangte Quadrat.

Dritter Abschnitt.

Gleichheit der Figuren. Verhältniß der Figuren und Linien.

§. 36. Erkl. Nimmt man in einem Parallelogramm eine beliebige Seite als Grundlinie, und zieht von beliebigen Punkten

der gegenüberliegenden Seite Senkrechte auf die Grundlinie, so sind diese Senkrechten alle einander gleich. Eine solche Senkrechte mißt die Entfernung der beiden Parallelen, und heißt die Höhe des Parallelogramms.

§. 37. Lehrs. Zwei Parallelogramme sind gleich, wenn sie gleiche Grundlinie, und gleiche Höhe haben; oder wenn sie bei gleicher Grundlinie zwischen Parallelen liegen. Zum Beweise legt man beide Parallelogramme so aufeinander, daß die gleichen Grundlinien sich decken; die den Grundlinien gegenüberliegenden Seiten können aber dann:

1. mehrere; oder
2. einen; oder
3. keinen Punkt gemeinschaftlich haben.

Man hat für jede Lage:

Dat. AF ‡ BD; AB ‡ CD : BE ‡ DF.

Thes. AD = BF.

Bew. ad 1. (Fig. 29. a.) AC = BD = EF (§. 32. Zus. 1).

EC = EC

AC — EC = EF — EC; oder

AE = CF; und da auch:

AB = CD, und

BE = DF, so ist:

$\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (II); es ist auch:

EBDC = EBDC; daher

$\triangle ABE + EBDC = CDF + EBDC$, oder

AD = BF.

Bew. ad 2. (Fig. 29. b.) Hier ist offenbar:

$\triangle ABC \cong \triangle BCD$, und

$\triangle BCD \cong \triangle EDF$ (§. 32.); daher

$\triangle ABC + \triangle BCD = \triangle BCD + \triangle EDF$; d. h.

AD = BF.

Bew. ad 3. (Fig. 29. c.) Hier hat man:

AC = BD = EF

CE = CE; daher

AC + CE = EF + CE; oder

AE = CF; und da auch:

AB = CD,

BE = DF; so ist:

$\triangle ABE \cong \triangle CDF$ (II.); da aber

$\triangle BOD = BOD$; und

$\triangle COE = \triangle COE$, so hat man:

$(\triangle ABE + \triangle BOD) - \triangle COE = (\triangle CDF + \triangle BOD) - \triangle COE$; d. i. AD = BF.

Zus. 1. Das Dreieck ist die Hälfte eines Parallelogramms, wenn beide Figuren gleiche Grundlinie und Höhe haben; denn (Fig. 29. b.) $\triangle BCD \cong \triangle BAC$; da nun: AD = ABC + BDC; oder AD = BDC + BDC = 2BDC; so ist: $\frac{1}{2}AD = \triangle BDC$.

Zus. 2. Zwei Dreiecke sind gleich, wenn sie bei gleicher Grundlinie gleiche Höhe haben.

So ist (Fig. 29. c.)

$\triangle BCD = \triangle BDF$; denn

$\triangle BCD = \frac{1}{2}AD$:

$\triangle BDF = \frac{1}{2}BF$ (Zus. 1.)

Da nun nach Lehrsatz: AD = BF; also auch:

$\frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}BF$; so ist auch $\triangle BCD = BDE$.

Zus. 3 Mehrere Dreiecke, die gleiche Höhe haben, sind einem Dreiecke von derselben Höhe gleich, dessen Grundlinie aber gleich der Grundlinie der Dreiecke zusammengenommen ist So hat man, wenn (Fig. 30) die Punkte D, B, F, K, alle in einer zu AC gezogenen Parallele liegen:

$\triangle ABC = \triangle ADE + \triangle EFG + GKC$;

denn zieht man die Geraden BE, BG, so ist:

$$\left.\begin{array}{l}\triangle ADE = \triangle ABE \\ \triangle EFG = \triangle EBG \\ \triangle GKC = \triangle GBC\end{array}\right\} \text{(Zus. 2.) daher}$$

$\triangle ADE + \triangle EFG + \triangle GKC = \triangle ABE + \triangle EBG + \triangle GBC$;

oder: $\triangle ABE + \triangle EBG + \triangle GBC = \triangle ABC$; also

$\triangle ADE + \triangle EFG + \triangle GKC = \triangle ABC$.

Zus. 4. Ein Dreieck ist einem Parallelogramme gleich, wenn es bei gleicher Höhe die doppelte Grundlinie, oder bei gleicher Grundlinie die doppelte Höhe des Parallelogrammes hat.

§ 38. Lehrsatz. Zieht man durch einen Punkt der Diagonale eines Parallelogrammes parallele Linien zu den Seiten des Parallelogramms, so entstehen vier neue Parallelogramme, von welchen jene zwei gleich sind, durch welche die Diagonale nicht geht, (Ergänzungen an der Diagonale); d. i.: (Fig. 31.)

Dat. $AB \parallel CD \parallel KL$, und

$AC \parallel BD \parallel MP$.

Thes. $AO = OD$.

Bew. Da nach der Voraussetzung die gegenüberliegenden Seiten parallel sind, so sind die Figuren AO, KP, ML, OD Parallelogramme; nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} \triangle BBC \cong \triangle BCD \\ \triangle OKC \cong \triangle OCP \\ \triangle BMO \cong \triangle BLO \end{array}\right\} \text{(§. 32);}$$

daher auch:

$$\triangle BAC - (\triangle OKC + \triangle BMO) = \triangle BCD - (\triangle OCP + \triangle BLO, \text{ d i.}$$

$$AO = OD.$$

§. 39. Lehrs. Theilt man eine Gerade (Fig. 32.) AB in zwei beliebige Theile AC, CB, so besteht AE als Quadrat der Geraden AB, aus den Quadraten der einzelnen Stücke, AC, CB, und dem doppelten Rechtecke, das mit den Linien AC, CB, construirt ist; d. i. (wenn wir durch; $\overline{AC} \, . \, \overline{CB}$ das mit AC, CB construirte Rechteck bezeichnen.)

Thes. $\overset{-\,\square}{AB} = \overset{-\,\square}{AC} + \overset{-\,\square}{CB} + 2 \, . \, \overline{AC} \, . \, \overline{CB}$.

Bew. Durch C ziehen wir $CF \parallel AD$; machen $AG = AC$, und ziehen durch G die $GH \parallel AB$; FC und GH schneiden sich in L; nun ist offenbar:

$$\overset{-\,\square}{AB} = AL + LE + LD + LB \; \ldots \; (1$$

Die vier Figuren, aus denen das Quadrat besteht, sind Parallelogramme (constr.); es ist aber, da:

$AG = AC$; $\angle GAC = R$:

$$AL = \overset{-\,\square}{AC} \ldots . (2$$

Man hat ferner:
AB = AD (Dat.); AC = AG (constr.); also AB — AC = AD — AG; oder CB = GD = FL = EH = LH = FE; und da $\angle$ FEH = R; so ist $LE = \overline{CB}^{\,\square}$ .... (3

Da ferner GDF = R, so ist LD ein Rechteck mit den Seiten DF, GD, oder AC, CB; d. h.

$$LD = \overline{AC} \,.\, \overline{CB} \;\ldots\; (4$$

Ebenso ist: $LB = \overline{AC} \,.\, \overline{CB}$ .... (5

Setzt man nun in (1 die entsprechenden Werthe aus (2, (3, (4, (5; so erhält man:

$$\overline{AB}^{\,\square} = \overline{AC}^{\,\square} + \overline{CB}^{\,\square} + 2 \,.\, \overline{AC} \,.\, \overline{CB}.$$

Zus. Eben so wird bewiesen, daß (Fig. 32.)

$$\overline{AC}^{\,\square} = \overline{(AB - CB)}^{\,\square} = \overline{AB}^{\,\square} + \overline{CB}^{\,\square} - 2 \,.\, \overline{AB} \,.\, \overline{CB} \text{ ist.}$$

§. 40. Lehrs. *In jedem rechtwinklichen Dreiecke ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate der beiden Katheten,* (pythagoräischer Lehrsatz) d. i. (Fig. 33.)

Dat. BAC = R

Thes. $\overline{BC}^{\,\square} = \overline{BA}^{\,\square} + \overline{AC}^{\,\square}$.

Bew. Verzeichne über die Seiten des Dreiecks die Quadrate BD, BG, CL; aus dem Scheitel A des rechten Winkels fälle eine Senkrechte auf die Hypotenuse, die AO, welche verlängert, die DE schneidet in M, und auf ihr senkrecht steht (15. 1. 4); es ist daher AM # CD # BE (§. 15. 3), und das Quadrat der Hypotenuse ist in zwei Rechtecke OD, OE getheilt. Nun ist zu zeigen, daß OD = CL, und OE = BG ist. Ziehe die Geraden AE, CF, so hat man $\triangle ABE \cong \triangle CBF$;

denn: BE = BC, BA = BF } §. 33. 1.

$\angle CBE = \angle ABF = R$

$\angle CBA = \angle CBA$

daher: $\angle ABE = \angle CBF$ also

$\triangle ABF \cong \triangle CBF$ (I.).

Nun ist $\triangle ABE = \frac{1}{2} OE$
$\triangle CBF = \frac{1}{2} BG$ } §. 37. Zus. 1.
daher $\frac{1}{2} OE = \frac{1}{2} BG$; folglich auch $OE = BG$.
Zieht man die Geraden, AD, BK, so ist auf dieselbe Weise
$\triangle ACD \cong \triangle BCK$; und da $\triangle ACD = \frac{1}{2} OD$, und
$\triangle KCB = \frac{1}{2} CL$, so ist auch $OD = CL$; mithin:

$$OE + OD = BG + CL \text{ oder:}$$
$$CE = BG + CL \text{ d. i.}$$
$$\overset{\square}{\overline{CB}} = \overset{\square}{\overline{BA}} + \overset{\square}{\overline{AC}}.$$

Zus. 1. Ist im $\triangle ABC$ (Fig. 17.) der Winkel BAC spitz, so ist, wenn BD senkrecht auf AC gezogen ist:

$$\overset{\square}{\overline{BC}} = \overset{\square}{\overline{BA}} + \overset{\square}{\overline{AC}} - 2 \,.\, \overline{AC} \,.\, \overline{AD}; \text{ d. h.}$$

das Quadrat der dem spitzen Winkel gegenüberliegenden Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, weniger dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und der auf ihr genommenen Entfernung des Scheitels des spitzen Winkels vom Durchschnittspunkt des auf diese Seite gezogenen Höhenperpendikels; denn nach Lehrsatz ist:

$$\overset{\square}{\overline{BD}} = \overset{\square}{\overline{BA}} - \overset{\square}{\overline{AD}} = \overset{\square}{\overline{BC}} - \overset{\square}{\overline{DC}}; \text{ also}$$
$$\overset{\square}{\overline{BA}} - \overset{\square}{\overline{AD}} = \overset{\square}{\overline{BC}} - \overset{\square}{(AC - AD)} \text{ daraus}$$
$$\overset{\square}{\overline{BA}} - \overset{\square}{\overline{AD}} = \overset{\square}{\overline{BC}} - \overset{\square}{\overline{AC}} - \overset{\square}{\overline{AD}} + 2 \overline{AC} \,.\, \overline{AD}; \text{ also}$$
$$\overset{\square}{\overline{BC}} = \overset{\square}{\overline{BA}} + \overset{\square}{\overline{AC}} - 2 \,.\, \overline{AC} \,.\, \overline{AD}.$$

Zus. 2. Ist im $\triangle ABC$ (Fig. 34) der Winkel ABC stumpf, und AD senkrecht auf die verlängerte BC, so ist

$$\overset{\square}{\overline{AC}} = \overset{\square}{\overline{AB}} + \overset{\square}{\overline{BC}} + 2 \,.\, \overline{BC} \,.\, \overline{BD} \text{ d. h.}$$

das Quadrat der dem stumpfen Winkel gegenüberliegenden Seite ist gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, mehr dem doppelten Rechtecke aus einer dieser Seiten und ihrer Verlängerung bis zum Durchschnittspunkte des auf sie gezogenen Höhenperpendikels.

§. 41. Lehrs. Ist in einem Dreiecke das Quadrat einer Seite gleich der Summe der Quadrate der beiden andern Seiten, so ist der Winkel, welcher der ersten Seite gegenüberliegt, ein rechter. (Fig. 35.)

— □ — □ — □
Dat. AC = AB + BC; Thes. ∧ ABC = R.

Bew. Auf AB errichten wir durch B die Senkrechte BD = BC, und ziehen DA, so ist:

— □ — □ — □
DA = AB + BD (§. 40.); da aber
BD = BC (constr.), also auch
— □ — □
BD = BC, so ist:
— □ — □ — □
DA = AB + BC; daher auch
— □ — □
DA = AC; also DA = AC und da BD = BC (constr.) und AB = AB; so ist;
△ABD ≌ ABC (II.); daher ∧ ABC = ∧ ABD = R.

§. 42. Erkl. Eine Linie messen, heißt angeben, wie oft eine als Einheit angenommene Linie in ihr enthalten sey; die (benannte) Zahl gibt dann die Größe der Linie rücksichtlich der Einheit an; da die Einheit willkührlich ist, so läßt sich immer eine Gerade als Einheit denken, die in zwei gegebenen Geraden genau enthalten ist.

§. 43. Lehrs. Zwei Dreiecke von gleicher Höhe verhalten sich wie ihre Grundlinien. (Fig. 36.)

Dat. BDA = R = FGE; BD = FG;
Thes. △ABC : △EFK = AC : EK.

Bew. Man nehme eine beliebige Gerade von der Beschaffenheit, daß sie sowohl in AC als EK genau enthalten sey. Diese Gerade sey Ax = Ey; es sey diese Ax in AC m mal enthalten, und in EK n mal; ziehen wir nun von B und F zu den Theilungspunkten der Grundlinie AC, EK die Geraden Bx..., Fy... so wird AC so wie △ABC in m gleiche Theile getheilt

(§. 37. Zus. 2.); ebenso wird EK, so wie △EFK in n gleiche Theile getheilt; daher hat man:

$$AC = m . \overline{Ax}$$

$$\triangle ABC = m . \triangle ABx$$

$$EK = n . \overline{Ey}$$

$\triangle EFK = n . \triangle EFy$; man hat nun:

$$\triangle ABC : \triangle EFK = m . \triangle ABx : n . EFy = m : n;$$

$$AC : EK = m. \; Ax : n. \; Ey = m : n;$$

daher (nach arithmetischen Gesetzen:

$$\triangle ABC : \triangle EFK = AC : EK.$$

Zus. Dreiecke sind die Hälfte von Parallelogrammen, mit denen sie gleiche Höhe und Grundlinie haben; und da sich die Hälften verhalten wie die Ganzen, und umgekehrt, so verhalten sich zwei Parallelogramme bei gleicher Höhe wie ihre Grundlinien.

§. 44. Lehrs. Dreiecke von gleicher Grundlinie verhalten sich wie ihre Höhen. (Fig. 37.)

Dat. $AC = EK$; $\wedge BDA = R = \wedge FGE$.

Thes. $\triangle ABC : \triangle EFK = BD : FG$.

Bew. Durch A errichte man auf AC die senkrechte $MA = BD$: ziehe MC; durch E errichte man auf EK die Senkrechte $PE = FG$; ziehe PK, so ist:

$$\triangle MAC = \triangle ABC;$$

$$\triangle PEK = \triangle EFK \text{ (§. 37: Zus. 2.)}$$

Nun hat man aber: MA, PE als Grundlinien, CA, KE als Höhen betrachtend:

$$\triangle MAC : \triangle PEK = MA : PE \text{ (§. 43.)};$$

oder durch gehörige Substitution:

$$\triangle ABC : \triangle EFK = BD : FG.$$

Zus. Parallelogramme verhalten sich bei gleichen Grundlinien wie ihre Höhen.

§. 45. Lehrs. Zwei Dreiecke verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen. (Fig. 38)

Dat. $\wedge BKA = R = ELD$;

Thes. $\triangle ABC : \triangle DEF = AC. \; BK : DF. \; EL.$

Bew. Wir errichten durch A auf AC die Senkrechte MA = EL, und ziehen MC; so hat man:

△ABC : △AMC = BK : MA (§. 44.),

△AMC : △DEF = AC : DF (§. 43.); daher

△ABC : △DEF = BK . AC : MA . DF (Arithm.); oder

△ABC : △DEF = BK . AC : EL . DF.

Zus. Zwei Parallelogramme verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundlinien und Höhen.

§. 46. Lehrs. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so stehen die durch diese Parallelen gemachten Abschnitte der beiden andern Seiten:

1) unter sich, und

2) mit den ganzen Seiten in Proportion. (Fig. 39.)

Dat. DE ♯ BC;

Thes. 1) AD : AE = DB : EC;

„ 2) AD : AE = AB : AC = DB : EC.

Bew. ad 1. Da DE ♯ BC (Dat.), so ist, wenn wir DC, EB ziehen,

△DBC = △EBC (§. 37. Zus. 2.); so auch

△BDE = △CDE.

Nun hat man:

△ADE : △DEB = AD : DB (§. 43); ferner:

△ADE : DEC = AE : EC; folglich wegen

△DEB = △DEC:

AD : DB = AE : EC, oder

AD : AE = DB : EC.

Bew. ad 2. △ADE : △ABE = AD : AB; ebenso

△ADE : △ACD = AE : AC; aber wegen:

△BEC = △DBC, und durch Subtraktion von

ABC ist: △ABE = △ACD; also;

AD : AB = AE : AC, oder

AD : AE = AB : AC.

Zus. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite mehrere Parallelen, so stehen die von diesen Parallelen abgeschnittenen Stücke unter sich in Proportion.

Anmerk. Die Proportion 2) könnte man auch aus 1) arithmetisch ableiten.

§. 47. Lehrs. Zieht man in einem Dreiecke mit einer Seite eine Parallele, so verhalten sich die beiden Parallelen, wie die anliegenden Dreiecksseiten. (Fig. 40.)

Dat. DE ‡ BC;

Thes. BC : DE = AB : AD = AC : AE.

Bew. Durch D ziehe DF ‡ AC; so ist (§. 46. 2)

DA : FC = BA : BC; da aber

DE ⫲ FC (Dat.); DF ⫲ EC (constr.) so ist:

DE = FC; also erhalten wir:

DA : DE = BA : BC, oder durch Vertauschung der äußern Glieder: BC : DE = BA : DA.

§. 48. Lehrs. Wenn eine Gerade die zwei Seiten eines Dreiecks so schneidet, daß die abgeschnittenen Stücke den ganzen Seiten, oder unter sich proportionirt sind, so ist diese Gerade der dritten Seite parallel. (Fig. 41.)

Dat. AB : AC = AD : AE;

Thes. DE ⫲ BC.

Bew. Wäre DE nicht parallel zu BC, so ziehe man DF ⫲ BC; dann hat man:

AB : AC = AD : AF,

Diese Proportion mit der gegebenen verglichen, gibt (nach Arithmethik)

AE = AF,

was unmöglich ist; daher DE ⫲ BC.

Anmerk. Hat man als Datum eine andere Proportion, so läßt sich der Beweis auf ähnliche Art führen:

§. 49. Lehrs. Eine Gerade, die einen Dreieckswinkel halbirt, schneidet, genugsam verlängert, die dem halbirten Winkel gegenüberliegende Seite den beiden andern Seiten proportionirt. (Fig. 42.)

Dat. x = y; Thes. AB : BC = AD : DC.

Bew. Verlängere AB bis F, so daß BF = BC, ziehe FC, so ist m = n (§. 26.); x = y (Dat.); aber auch (x + y)

$=(m+n)$ (§. 20.); oder $2y=2n$; also $y=n$; mithin FC ‡ BD; daraus folgt:

AB : BF = AD : DC; und da BF = BC:

AB : BC = AD : DC.

Zus. Der vorstehende Lehrsatz gilt auch umgekehrt, und läßt sich eben so einfach beweisen.

§. 50. Lehrs. Halbirt eine Gerade die nicht parallelen Seiten eines Trapezes, so ist sie den parallelen Seiten parallel, und gleich der halben Summe dieser Parallelen (Fig. 43.)

Dat. AB ‖ CD; AE = EC; BF = FD;

Thes. EF ‖ AB ‖ CD; EF = $\frac{1}{2}$ (AB + CD).

Bew. Man verlängere die nicht parallelen Seiten, bis sie sich in K schneiden, so hat man:

KC : KD = AC : BD (§. 46. 2.)

= $\frac{1}{2}$ AC : $\frac{1}{2}$ BD; oder

KC : KD = EC : FD; daher

EF ‖ CD ‖ AB (§. 48.)

Man ziehe nun BC, welche die EF in L schneidet, so hat man:

BF : BD = FL : DC (§. 47.); da aber

BF = $\frac{1}{2}$ BD ist, so ist FL = $\frac{1}{2}$ DC; ferner:

CE : CA = EL : AB (§. 47.); nun ist

CE = $\frac{1}{2}$ CA; also EL = $\frac{1}{2}$ AB; daher

FL + EL = $\frac{1}{2}$ DC + $\frac{1}{2}$ AB, oder

EF = $\frac{1}{2}$ (AB + CD).

Vierter Abschnitt.

Aehnlichkeit der Figuren.

§. 51. Erkl. Figuren heißen ähnlich, wenn sie gleiche Form haben; damit aber zwei Figuren gleiche Form haben, muß ihre Seitenzahl gleich, es müssen die Winkel der Ordnung nach gleich, und die gleiche Winkel einschließenden Seiten proportionirt seyn.

§. 52. Lehrsatz. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten beziehungsweise proportionirt, und die von den proportionirten Seiten eingeschlossenen Winkel gleich haben. (Fig. 44.)

Dat. ab : bc = AB : BC; ∧ abc = ∧ ABC;

Thes. △ abc ∽ △ ABC.

Bew. Man nehme BD = ba, und ziehe

DE ∦ AC, so hat man:

BD : BE = BA : BC (§. 46. 2), oder:

ab : BE = BA : BC; und da auch

ab : bc = BA : BC; so folgt:

BE = bc; daher

△ abc ≌ △ DBE (I.), also auch

∧ BDE = ∧ bac; es ist aber

∧ BDE = ∧ BAC (§. 13. 2.); daher auch

∧ bac = BAC, und eben so

∧ bca = BCA; ferner hat man:

BD : DE = BA : AC; oder da wegen der Congruenz auch DE = ac, so hat man:

ba : ac = BA : AC; eben so

bc : ca = BC : CA; daher

△ abc ∽ △ ABC, da alle Winkel gleich und alle Seiten proportionirt sind.

Zus. 1. Sind die Polygone ABCDE, abcde (Fig. 45.) einander ähnlich, und wir ziehen die gleichliegenden Diagonalen AC, AD, ac, ad, so ist △ ABC ∽ △ abc, △ ACD ∽ △ acd, △ ADE ∽ △ ade; denn △ ABC ∽ △ abc (Lehrsatz); daraus folgt:

∧ BCA = ∧ bca und

BC : CA = bc : ca; da aber (ex dato)

∧ BCD = ∧ bcd, und

BC : CD = bc : cd, so ergibt sich:

∧ ACD = ∧ acd und

AC : CD = ac : cd daher nach Lehrsatz

△ ACD ∽ △ acd u. s. f.; durch gleichliegende Diagonalen werden also ähnliche Polygone in ähnliche Dreiecke getheilt.

Zus. 2. Zwei rechtwinkliche Dreiecke sind ähnlich, wenn sie die Katheten gegenseitig proportionirt haben.

§. 53. Lehrs. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie alle Seiten beziehungsweise proportionirt haben; d. i. (Fig. 44.)

Dat. $AB : BC : AC = ab : bc : ac$.

Thes. $\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

Bew. Wir machen $BD = ab$, und ziehen durch D die $DE \# AC$, so hat man:

$AB : BC = BD : BE$; oder, da $BD = ab$;

$AB : BC = ab : BE$; aber man hat auch

$AB : BC = ab : bc$ (Dat.); daraus folgt:

$BE = bc$:

ferner hat man: $AB : AC = BD : DE$, oder

$AB : AC = ab : DE$, und ebenso

$AB : AC = ab : ac$ (Dat.); also

$DE = ac$.

Mithin $\triangle BDE \cong \triangle abc$ (II.); also $\wedge B = \wedge b$; $\wedge D = \wedge a$; $\wedge E = \wedge c$; da aber $\wedge D = \wedge A$; und $\wedge E = \wedge C$ (§. 13. 2), so ist auch $\wedge A = \wedge a$, $\wedge C = \wedge c$; daher

$\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

§. 54. Lehrs. Wenn in zwei Dreiecken zwei Winkel (also alle Winkel §. 20. Zus. 5.) beziehungsweise gleich sind, so sind die Dreiecke ähnlich. (Fig. 44.)

Dat. $\wedge A = \wedge a$; $\wedge B = \wedge b$; $\wedge C = \wedge c$;

Thes. $\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

Bew. Wir machen $BD = ba$; $BE = bc$, und ziehen DE, so ist $\triangle DBE \cong abc$ (I.); daher $\wedge D = \wedge a$; aber $\wedge a = \wedge A$ (Dat.); also auch $\wedge D = \wedge A$; mithin $DE \# AC$ (§. 11. Zus.); daher:

$BA : BC = BD : BE$; oder

$BA : BC = ba : bc$; ebenso

$BA : AC = BD : DE$, oder

$BA : AC = ba : ac$; daher

$\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

Zus. Zwei rechtwinkliche Dreiecke sind ähnlich, wenn sie einen spitzen Winkel beziehungsweise gleich haben.

§. 55. Lehrs. Zwei Dreiecke sind ähnlich, wenn sie zwei Seiten beziehungsweise proportionirt, und ein Paar der den zwei proportionirten Seiten gegenüberliegenden Winkel gleich haben; das Paar der den andern proportionirten Seiten gegenüberliegenden Winkel aber $\gtrless$ 2R ist; d. i. (Fig. 44.)

Dat. BA : BC = ba : bc;

$\wedge A = \wedge a$; $\wedge C + \wedge c \gtrless 2R$.

Thes. $\triangle ABC \backsim \triangle abc$.

Bew. Wir machen BD = ba, und ziehen DE ⧺ AC, so ist:

BA : BC = BD : BE oder

BA : BC = ba : BE; daher

BE = bc, und da

$\wedge D = \wedge A = \wedge a$; $\wedge C = \wedge E$; und $\wedge C + \wedge c \gtrless 2R$, so

ist auch $\wedge c + \wedge E \gtrless 2R$; daher

$\triangle DBE \cong \triangle abc$ (IV.); also $\wedge B = \wedge b$, u. s. f.

Zus. Zwei rechtwinkliche Dreiecke sind ähnlich, wenn sie die Hypotenuse und eine Kathete beziehungsweise proportionirt haben.

Anmerk. Man vergleiche §. 30. Anmerk.

§. 56. Lehrs. Die Perimeter zweier ähnlicher Polygone verhalten sich, wie ein Paar homologer Seiten oder Diagonalen, d. i. (Fig. 45.)

Dat. ABCDE $\backsim$ abcde.

Thes. Perimet. ABCDE : per. abcde = AB : ab = BC : bc = AC : ac, u. s. f.

Bew. AB : ab = BC : bc = CD : cd = DE : de = EA : ea (Dat.); daher: AB + BC + CD + DE + EA : ab + bc + cd + de + ea = AB : ab (Arith. §. 96. 4. Zus.)

d. i. Perimet. ABCDE : perim. abcde = AB : ab.

§. 57. Lehrs. Aehnliche Dreiecke verhalten sich, wie die Quadrate homologer Seiten; d. i. (Fig. 46.)

Dat. $\triangle abc \backsim \triangle ABC$;

Thes. $\triangle abc : \triangle ABC = ab^2 : AB^2$.

Bew. Aus den gleichen Winkeln b, B ziehen wir die Senkrechten bd, BD auf ac, AC; da nun $\wedge a = \wedge A$ (Dat.), also $\triangle abd \backsim \triangle ABD$ (§. 54. Zus. 2.)

Nun hat man:

$\triangle abc : \triangle ABC = ac \,.\, bd : AC \,.\, BD$ (§. 45) .... (1

Man hat auch:

$ab : ac = AB : AC$, und

$ab : bd = AB : BD$; daraus folgt:

$ab^2 : ac \,.\, bd = AB^2 : AC \,.\, BD$ oder

$ab^2 : AB^2 = ac \,.\, bd : AC \,.\, BD$; mithin

durch Substitution in (1:

$$\triangle abc : \triangle ABC = ab^2 : AB^2.$$

$$\triangle abc : \triangle ABC = \overline{ac}^2 : \overline{AC}^2.$$

Zus. 1. In ähnlichen Dreiecken verhalten sich die Höhen wie die Grundlinien.

Zus. 2. Aehnliche Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ähnlich liegender Seiten oder Diagonalen (Fig. 45.), d. i.

Dat. Polyg. ABCDE $\backsim$ pol. abcde.

Thes. Pol. ABCDE : pol. abcde $= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$,

$= \overline{AE}^2 : \overline{ae}^2$ u. s. f.

Bew. Durch gleichliegende Diagonalen entstehen in beiden Polygonen lauter ähnliche Dreiecke; daher hat man:

$\triangle ABC : \triangle abc = \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ (Lehrs.),

$\triangle ACD : \triangle acd = \overline{CD}^2 : \overline{cd}^2$,

$= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$,

$\triangle ADE : \triangle ade = \overline{DE}^2 : \overline{de}^2$

$= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; daher

$\triangle ABC : \triangle abc = \triangle ACD : \triangle acd = \triangle ADE : \triangle ade$, also

$\triangle ABC + \triangle ACD + \triangle ADE : \triangle abc + \triangle acd + \triangle ade$

$= \triangle ADE : \triangle ade$

$= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$; d. i.

Polyg. ABCDE : pol. abcde $= \overline{AB}^2 : \overline{ab}^2$ u. s. f.

Anmerk. Reguläre Figuren von gleicher Seitenzahl verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Seiten. § 57,

§. 58. Lehrs. Zieht man im rechtwinklichen Dreiecke aus dem Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so entstehen dadurch zwei neue Dreiecke, die unter sich und dem Ganzen ähnlich sind; d. i. (Fig. 47.)

Dat. $\wedge ABC = R = ADB$.

Thes. $\triangle ABD \backsim \triangle ABC \backsim \triangle DBC$.

Bew. $\wedge BAD = \wedge BAC$; daher $\triangle BAD \backsim \triangle BAC$ (§. 54. Zus. 2.); $\wedge BCD = \wedge BCA$; daher $\triangle BCD \backsim \triangle BCA$. $\wedge BCD + \wedge CBD = R = \wedge CBD + \wedge DBA$; also $\wedge BCD = \wedge DBA$; daher $\triangle BDC \backsim \triangle ADB$.

Zus. 1. Aus $\triangle ABD \backsim \triangle DBC$ folgt:

$$AD : BD : DC;$$

d. h. zieht man in einem rechtwinklichen Dreiecke vom Scheitel des rechten Winkels eine Senkrechte auf die Hypotenuse, so ist diese Senkrechte die mittlere Proportionale zwischen den Abschnitten der Hypotenuse.

Zus. 2. Aus $\triangle ABD \backsim \triangle ABC$ folgt:

$$AD : AB : AC \;\ldots\; (1$$

aus $\triangle BCD \backsim \triangle ABC$ folgt:

$$DC : BC : AC \;\ldots\; (2$$

d. h. jede Kathete ist die mittlere Proportionale zur ganzen Hypotenuse und dem der Kathete anliegenden Abschnitte.

Aus (1 und (2 folgt:

$$\overline{AB}^2 = AD \,.\, AC$$

$$\overline{BC}^2 = DC \,.\, AC;$$ beide Gleichungen addirt,

gibt: $$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = AC\,(AD + DC)$$

$$= AC \,.\, AC,$$ oder

$$\overline{AB}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{AC}^2;$$

d. h. drückt man die Seiten eines rechtwinklichen Dreiecks (nach einer als Einheit angenommenen Größe) in Zahlen aus, so ist das Quadrat der Hypotenuse gleich der Summe der Quadrate

der beiden Katheten. (Quadrat in arithmetischer Bedeutung genommen).

Zus. 3. Bezeichnen uns a, b zwei beliebige Primzahlen, so sind 2ab, a^2-b^2 die allgemeinen Ausdrücke für die Katheten eines pythagoräischen Dreiecks.

Anhang

zum dritten und vierten Abschnitte.

§. 59. Aufgaben. 1. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel (also auch in ein Rechteck) zu verwandeln. *)

Auflös. Sey AD das gegebene Parallelogramm (Fig. 48). An BD verzeichne man den gegebenen Winkel EBD, verlängere den Schenkel BE, bis er die AC schneidet in E; durch D ziehen wir DF ♯ BE, bis DF die verlängerte AC schneidet in F; so ist BF das verlangte Parallelogramm.

Bew. Das Parallelogramm BF hat den verlangten Winkel EBD, und zugleich ist BF = AD (§. 37.).

2. Ein Dreieck in ein Parallelogramm (also auch in ein Rechteck) zu verwandeln (Fig. 49.).

Aufl. Sey ABC das Dreieck.

Halbire AC in D; durch D ziehe DF $\overset{+}{=}$ AB; ziehe BF; so ist AF = △ ABC.

Bew. Da AB $\overset{+}{=}$ FD; so ist AF ein Parallelogramm; das Parallelogramm hat gleiche Höhe und die halbe Grundlinie des Dreiecks; mithin beide Figuren gleich.

3. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebener Seite verwandeln (Fig. 31.).

Auflös. Das gegebene Parallelogramm sey MK; die Seite, welche das zu verzeichnende Parallelogramm haben soll, sey KC.

---

*) Bei Verwandlung der Figuren wird bloß die Form geändert; die Größe der Figuren rücksichtlich ihrer Fläche darf nicht geändert werden.

An AK setzen wir in einer Verlängerung die KC und ziehen CO, die wir verlängern, bis sie von der verlängerten AM geschnitten wird in B; durch B ziehen wir eine Parallele mit AC, und durch C eine Parallele mit AB; beide Parallelen verlängert, bis sie sich in D schneiden; MO bis P, KO bis L verlängert, so ist OD das verlangte Parallelogramm.

Bew. §. 38.

Zus. Ein Parallelogramm in ein anderes mit gegebenem Winkel und gegebener Seite verwandeln.

4. Jede geradlinige Figur in ein Dreieck verwandeln.

Auflös. mit Bew. Im Allgemeinen verwandelt man das n Eck in ein (n — 1) Eck; das (n—1) Eck in ein (n — 2) Eck; u. s. f., bis man zuletzt ein Dreieck erhält.

Die gegebene Figur sey ein Fünfeck ABCDE (Fig. 50.); wir ziehen eine Diagonale BD (so, daß sie ein Dreieck abschneidet); durch C ziehe man eine Parallele mit BD, bis sie von der verlängerten ED geschnitten wird in F; ziehe BF; so ist: Viereck BFEA = Fünfeck BCDEA; denn △ BCD = △ BFD (§. 37. Zus. 2.); addirt man zu jedem dieser Dreiecke das Viereck ABDE, so erhält man Fünfeck ABCDE = Viereck ABFE.

Um das Viereck in ein Dreieck zu verwandeln, ziehen wir die Diagonale BE; mit BE parallel durch F eine Gerade, bis sie die verlängerte AE schneidet in K; ziehe BK; so ist ABK das verlangte Dreieck; denn es ist

△ ABK = Viereck ABFE = Fünfeck ABCDE.

Zus. Jede geradlinige Figur läßt sich also in ein Rechteck verwandeln.

5. Eine geradlinige Figur in eine andere verwandeln, die ihr ähnlich ist.

Auflös. Da es unendlich viele Figuren gibt, die einer gegebenen Figur ähnlich seyn können, so muß das Verhältniß der gegebenen und gesuchten Figur entweder rücksichtlich des Umfangs oder der Fläche gegeben seyn.

Es verhalte sich der Umfang der gegebenen Figur zum Umfange der zu suchenden = AB : Ab.

Wir tragen an AB die Ab auf, und ziehen von A die Diagonalen AC, AD; durch b ziehen wir bc ⧺ BC; durch c die cd ⧺ CD; durch d die de ⧺ DE; so ist Abcde ∽ ABCDE.

Bew. Da bc ⧺ BC; so hat man Ab : bc = AB : BC, u. s. f.; also alle Seiten beziehungsweise proportionirt; so ist auch wegen der Parallelen ∧ B = ∧ b; ∧ C = ∧ c; u. s. f.; also alle Winkel der Ordnung nach gleich; und man hat:

Perimet. Abcde : Perimet. ABCDE = Ab : AB (§. 56.).

6. Zu drei gegebenen Geraden die vierte Proportionallinie finden (Fig. 40.).

Aufl. mit Bew. Die drei gegebenen Geraden seyen AD, AE, DB.

Wir setzen AD, AE unter einem beliebigen Winkel DAE zusammen, und ziehen DE; an AD setzen wir in der Verlängerung die DB; durch B ziehen wir eine Parallele zu DE, bis diese die verlängerte AE in C schneidet; so ist EC die verlangte vierte Proportionale; denn offenbar hat man:

AD : AE = DB : EC.

Anmerk. Soll man zu zwei Geraden die dritte Proportionallinie finden, so macht man DB = AE.

7. Eine Gerade in mehrere Theile theilen, die sich verhalten wie die Geraden m, n, p (verhältnißmäßige Theilung) (Fig. 52.).

Aufl. Die zu theilende Gerade sey AB.

An die AB setzen wir unter einem beliebigen Winkel die AD; von A aus nehme man AC = m; CE = n; EF = p; ziehe FB; mit FB durch E und C die Parallelen EK, CL, so sind AL, LK, KB die verlangten Theile.

Bew. AC : CE : EF = AL : LK : BK; aber AC = m; CE = n; EF = p; daher AL : KL : KB = m : n : p.

Anmerk. Nimmt man: m = n = p, so kann man eine Gerade in beliebig viele gleiche Theile theilen.

8. Eine Gerade finden, deren Quadrat gleich mehrern gegebenen Quadraten ist (Fig. 53.).

Auflös. Die Seiten der gegebenen Quadrate seyen AB, CD, EF; wir setzen nun AB und CD unter einem rechten Winkel zusammen, und ziehen BD; auf BD errichten wir durch D die Senkrechte EF, und ziehen BF; so ist BF die verlangte Linie; denn es ist: $\overset{-\square}{BF} = \overset{-\square}{BA} + \overset{-\square}{CD} + \overset{-\square}{EF}$.

Bew. $\overset{-\square}{BF} = \overset{-\square}{BD} + \overset{-\square}{EF}$; aber

$\overset{-\square}{BD} = \overset{-\square}{BA} + \overset{-\square}{CD}$; daher

$\overset{-\square}{BF} = \overset{-\square}{BA} + \overset{-\square}{CD} + \overset{-\square}{EF}$

9. Eine Gerade finden, deren Quadrat gleich der Differenz zweier gegebenen Quadrate ist (Fig. 54.).

Aufl. Sey AB die Seite des kleineren Quadrates; an AB setze man rechtwinklich durch A die AE; aus B beschreibe man mit der Seite des größern gegebenen Quadrates einen Kreis, der die AE schneidet M; so ist MA die Seite des verlangten Quadrates.

Bew. Man ziehe MB; so ist:

$$\overset{-\square}{MA} + \overset{-\square}{BA} = \overset{-\square}{MB};\text{ also}$$

$$\overset{-\square}{MA} = \overset{-\square}{MB} - \overset{-\square}{AB}.$$

10. Eine Gerade finden, deren Quadrat gleich dem Doppelten eines gegebenen Quadrates ist

Aufl. Man ziehe im gegebenen Quadrate die Diagonale, so ist diese Diagonale die verlangte Linie. Der Beweis ergibt sich leicht.

Anmerk. Das Quadrat der halben Diagonale ist die Hälfte des gegebenen Quadrates.

11. Eine Gerade so theilen, daß der größere Theil die mittlere Proportionale zu dem kleinern Theile und der ganzen Linie werde; (in media et extrema ratione theilen) (Fig. 55.).

Aufl. AB sey die so zu theilende Gerade.

An AB setze man durch A rechtwinklich AC $= \frac{1}{2}$ AB;

ziehe CB. Mache CK = CA; BF = BK; so ist F der verlangte Theilungspunkt. Man hat nemlich:

AF : FB : AB.

Bew. $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CB}^2 = (CK + KB)^2$;

daher $\overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 = \overline{CK}^2 + 2 . CK . KB + \overline{KB}^2$; da

AC = CK; also $\overline{AC}^2 = \overline{CK}^2$, so ergibt sich:

$\overline{AB}^2 = \overline{BK}^2 + 2CK . KB$; da aber

2CK = 2CA = AB, so hat man:

$\overline{AB}^2 = \overline{KB}^2 + AB . KB$; daraus

$\overline{KB}^2 = AB (AB - KB)$; aber

BK = FB, (constr.); also:

$\overline{FB}^2 = AB . AF$; oder

AF : FB : AB (Arithmetik).

Fünfter Abschnitt.

Vom Kreise und von regulären Vielecken.

§. 60. Lehrs. Durch drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte ist die Peripherie eines Kreises bestimmt; aber nur die Peripherie eines Kreises.

Bew. Die drei gegebenen Punkte seyen A, B, D, (Fig. 56.). Wir halbiren die Geraden BA, BD durch die Senkrechten MO, EK, und verlängern diese, bis sie sich schneiden in C, so ist C der Mittelpunkt des Kreises, dessen Radius die Gerade CA = CB = CD ist; denn $\triangle CAO \cong COB$ (I.); daher CA = CB; eben so $\triangle CBK \cong \triangle CKD$ (I.); also CB = CD = CA; es geht daher die Peripherie des aus C mit CA beschriebenen Kreises durch B und D, und da dessen Mittelpunkt sowohl in der Geraden MO, als EK liegt, so gibt es nur einen Mittelpunkt, also nur einen Kreis, der durch die drei gegebenen Punkte geht. Um zu zeigen, daß die Geraden MO, EK sich schneiden, ziehe

man OK, so ist COK < COB (=R), und CKO < CKB (=R); daher COK + CKO < 2R; also schneiden sich MO, EK (§. 12.).

Zus. Eine Gerade, welche die Sehne eines Kreises senkrecht halbirt, geht immer durch des Kreises Mittelpunkt.

§. 61. Lehrs. Eine Gerade, die auf dem Radius an dessen Endpunkt senkrecht steht, ist eine Tangente, und umgekehrt: die Tangente steht immer senkrecht auf dem durch ihren Berührungspunkt gehenden Radius (oder Diameter) (Fig. 57.).

Bew. Ist BA auf dem Radius durch A senkrecht, so ist CD > CA (§. 31. Zus. 2.); also liegt D, so wie jeder Punkt der BA (A ausgenommen) außerhalb der Peripherie; die Gerade BA hat also nur einen Punkt A mit der Peripherie gemeinschaftlich

Ist umgekehrt BA eine Tangente, hat also nur einen Punkt mit der Peripherie gemeinschaftlich, so ist D, so wie jeder Punkt der BA außerhalb der Peripherie; also CD > CA (§. 22. Zus. 5.); mithin CA die kürzeste Linie von C auf AD; also senkrecht (§. 35. 4. Zus. 3.).

§. 62. Erkl. Centriwinkel heißt jener Winkel, dessen Scheitel in dem Mittelpunkte eines Kreises liegt; Peripheriewinkel jener, dessen Scheitel in der Peripherie liegt, und dessen Schenkel Sehnen sind.

§. 63. Lehrs. Sind in einem Kreise, oder in Kreisen mit gleichem Radius zwei Centriwinkel gleich, so sind auch die ihnen entsprechenden Sehnen, Bogen, Ausschnitte und Abschnitte gleich (Fig. 58.).

Dat. $\wedge$ ACB = $\wedge$ ECD;

Thes. arc AB = arc. ED; AB = ED u. s. f.

Bew. Wir legen DCE so auf ACB, daß CD auf CA falle, so muß D auf A, CE auf CB fallen, und E auf B; es muß aber jeder Punkt des Bogens ED auf einen Punkt des Bogens AB fallen; denn sonst wären die Radien desselben Kreises nicht gleich. Es decken sich also die Bogen, Sehnen, Ausschnitte und Abschnitte.

Zus. 1. Sind zwei Sehnen im Kreise gleich, so sind auch die entsprechenden Centriwinkel, Bogen, Abschnitte und Ausschnitte gleich; denn es ist $\triangle ACB \cong \triangle CED$ (II.) u. s. f. Ueberhaupt lassen sich diese Sätze alle umkehren, und auf dieselbe Art beweisen.

Zus. 2. Theilen wir einen Centriwinkel in beliebig viele, unter sich gleiche, Theile, und verlängern die Theilungslinien bis zur Peripherie, so wird auch der Bogen in eben so viele, unter sich gleiche, Theile getheilt. Es verhalten sich also in einem Kreise zwei Centriwinkel, wie ihre Bogen, und umgekehrt.

Zus. 3. Da ein Dreieck im Kreise, wie ACB (Fig. 58.) immer gleichschenklich ist, so gelten die Sätze §. 26. Zus. 1.; §. 28. Zus. 6; §. 29. Zus. 4.; nemlich:

a. Eine den Centriwinkel halbirende Gerade halbirt auch die Sehne und den Bogen, und steht auf der Sehne senkrecht.

b Eine vom Mittelpunkte aus gezogene Gerade, die die Sehne halbirt, steht auf ihr senkrecht, und halbirt Centriwinkel und Bogen.

c. Eine Gerade, die vom Mittelpunkte aus auf der Sehne senkrecht steht, halbirt Centriwinkel, Sehne und Bogen.

§. 64. Lehrs. Gleiche Sehnen sind im Kreise gleich weit vom Mittelpunkte entfernt; und Sehnen, welche vom Mittelpunkte gleich weit entfernt sind, sind gleich (Fig. 58.).

Bew. Ist $AB = ED$, und ziehen wir CK, CL beziehungsweise senkrecht auf AB, ED, so wird $AK = KB = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}ED = EL = LD$ (§. 63. Zus. 3. c.)

Nun ist: $AC^2 = AK^2 + CK^2$; $CD^2 = DL^2 + CL^2$.

Da nun $AC = CD$, also $AC^2 = CD^2$ ist, so ist:

$$AK^2 + CK^2 = DL^2 + CL^2; \text{ es ist aber}$$
$$AK^2 = DL^2; \text{ also}$$
$$\overline{}$$
$$CK^2 = CL^2, \text{ oder: } CK = CL \text{ u. s. f.}$$

Zus. Die größere Sehne liegt dem Mittelpunkte näher, und umgekehrt; denn wäre $AK > DL$, so hat man:

$$AK^2 + CK^2 = DL^2 + CL^2$$
$$AK^2 > DL^2$$
$$CK^2 < CL^2 \text{ oder } CK < CL \text{ u. s. f.}$$

Der Durchmesser ist also die größte Sehne.

§. 65. Lehrs. Der Peripheriewinkel ist die Hälfte seines Centriwinkels (d. h. des Centriwinkels, der mit ihm auf demselben Bogen steht) (Fig. 59.)

Wir unterscheiden hier drei Fälle, je nachdem der Mittelpunkt des Kreises

1) in einem Schenkel, oder
2) zwischen den Schenkeln, oder
3) außerhalb der Schenkel des Peripheriewinkels liegt.

Bew. ad 1. Thes. $\wedge FAD = \frac{1}{2} \wedge FCD$. Man hat nemlich:

$\wedge CFA + \wedge CAF = \wedge FCD$ (§. 20.) es ist aber:

$CFA = CAF$ (§ 26.); daher

$CAF + CAF = FCD$; oder

$2CAF = FCD$; $CAF = \frac{1}{2} FCD$; also

$\wedge FAD = \frac{1}{2} \wedge FCD$

Bew. ad 2. Thes. $\wedge FAE = \frac{1}{2} \wedge FCE$.

Wir ziehen den Durchmesser AD, so haben wir:

$$\left.\begin{array}{l} \wedge FAD = \frac{1}{2} FCD \\ \wedge DAE = \frac{1}{2} DCE \end{array}\right\} \text{ad 1.}$$

daher: $\wedge FAD + DAE = \frac{1}{2}(FCD + DCE)$; d. i.

$\wedge FAE = \frac{1}{2} \wedge FCE$

Bew. ad 3. Thes. $\wedge BAF = \wedge \frac{1}{2} BCF$.

Man zieht den Durchmesser AD, so hat man:

$$\left.\begin{array}{l} \wedge BAD = \frac{1}{2} \wedge BCD \\ \wedge FAD = \frac{1}{2} \wedge FCD \end{array}\right\} \text{ad 1.}$$

daher: $BAD - FAD = \frac{1}{2}(BCD - FCD)$; d. i.

$\wedge BAF = \frac{1}{2} \wedge BCF$.

Zus. 1. Peripheriewinkel eines Kreises, die auf demselben, oder gleichen Bogen stehen, sind einander gleich; jeder ist nemlich die Hälfte desselben Ganzen.

Zus. 2. Ein Peripheriewinkel, dessen Schenkel auf dem Endpunkte des Durchmessers stehen, ist ein rechter.

Zus. 3. In einem Vierecke, dessen Ecke in der Peripherie eines Kreises liegen, sind je zwei gegenüberliegende Winkel = 2R; und umgekehrt.

§. 66. Lehrs. Der Winkel zweier Sehnen im Kreise ist gleich der Summe zweier Peripheriewinkel, die auf den zwischen den Schenkeln abgeschnittenen Bogen stehen (Fig. 60.).

Bew. Ist DOB der von den Sehnen gebildete Winkel, und man zieht die Gerade BE, so ist offenbar:

$$\wedge DOB = \wedge ABE + \wedge DEB \text{ (§. 20.)}.$$

Zus. Der Winkel KLM zweier Sekanten (Fig. 60.) ist gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel, die auf den zwischen den Sekanten abgeschnittenen Bogen stehen. Denn zieht man PM, so ist:

$$\wedge KLM + \wedge PML = \wedge KPM \text{ (§. 20.); daher}$$

$$\wedge KLM = \wedge KPM - \wedge PML.$$

§. 67. Der Winkel einer Sehne und Tangente (Tangentialwinkel) ist dem Peripheriewinkel gleich, der auf dem Bogen steht, welcher zwischen der Sehne und Tangente abgeschnitten wird (Fig. 61.).

Bew. Sey der gegebene Winkel ABD; wir ziehen den Durchmesser BE, und die Gerade ED, so ist:

$$\wedge EDB = R \text{ (§. 65. Zus. 2.); daher}$$

$$\wedge DEB + DBE = R \text{ (§. 20. Zus. 7.)}$$

$$\wedge DBE + \wedge DBA = R \text{ (§. 61.); also auch:}$$

$$\wedge DEB + \wedge DBE = \wedge DBE + \wedge DBA$$

$$\wedge DBE = \wedge DBE$$

also: $\wedge DEB = \wedge DBA.$

Zus. 1. Der Winkel einer Sekante und Tangente ist gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel, die auf den zwischen der Sekante und Tangente abgeschnittenen Bogen stehen; denn es ist (Fig. 61.)

$$\wedge EAB = \wedge EDB - \wedge DBA \text{ (§. 20.); also:}$$

$$\wedge EAB = \wedge EDB - \wedge AEB.$$

Zus. 2. Der Winkel zweier Tangenten läßt sich durch eine Sekante, die durch den Scheitel des Winkels gezogen ist, in zwei Winkel theilen, auf welche Zus. 1. anwendbar ist; daher denn der Winkel zweier Tangenten gleich der Differenz zweier Peripheriewinkel, die auf den zwischen den Tangenten abgeschnittenen Bogen stehen.

§. 68. Lehrs. Schneiden sich zwei Sehnen im Kreise, so bilden die Stücke der einen Sehne die mittlern, die Stücke der andern Sehne die äußern Glieder einer geometrischen Proportion; d. i. (Fig. 60)

Thes. DO : OA = OB : OE.

Bew. Zieht man die Geraden DB, AE, so ist $\wedge$DBA = $\wedge$AED (§. 65. Zus. 1.); $\wedge$DOB = $\wedge$AOE (Scheitelw.); also $\triangle$DOB $\backsim$ $\triangle$AOE (§. 54.); daher: DO : OA = OB : OE.

Zus. Zieht man im Kreise von einem Punkte der Peripherie eine Senkrechte auf den Durchmesser, so ist diese Senkrechte die mittlere geometrische Proportionale zu den Abschnitten des Durchmessers. (Erhellt auch aus §. 58. Zus. 1.)

§. 69 Lehrs. Schneiden sich zwei Sekanten außerhalb des Kreises, so sind die ganzen Sekanten ihren Stücken außerhalb des Kreises umgekehrt proportionirt (Fig. 60.).

Bew. Sind KL, ML die Sekanten, so ziehe man PM, KQ; nun ist $\wedge$KLQ = $\wedge$MLP; $\wedge$LKQ = $\wedge$LMP (§. 65. Zus. 1); daher $\triangle$KLQ $\backsim$ $\triangle$LPM (§. 54.); mithin:

KL : LM = LQ : LP.

§. 70. Lehrs. Schneiden sich eine Tangente und Sekante eines Kreises, so ist die Tangente die mittlere Proportionale zu der ganzen Sekante, und ihrem Stücke außerhalb des Kreises (Fig. 61.).

Bew. Ist EA die Sekante, BA die Tangente, so ziehe man EB, DB; nun ist $\wedge$EAB = $\wedge$DAB; $\wedge$AEB = $\wedge$ABD (§. 67.); daher $\triangle$AEB $\backsim$ $\triangle$ADB; mithin AE : AB : AD.

Zus. Ist AK (Fig. 61.) eine durch A gehende Tangente des Kreises, so ist auch AE : AK : AD; daher AK = AB; d. h.

die zwei von einem Punkte außerhalb des Kreises an diesen gezogenen Tangenten sind einander gleich.

§ 71. Erklär. Eine Figur ist in einem Kreise beschrieben, wenn die Peripherie durch alle Ecke der Figur geht (der Kreis ist dann um die Figur beschrieben); eine Figur ist um einen Kreis beschrieben, wenn alle Seiten der Figur Tangenten des Kreises sind (der Kreis ist in die Figur beschrieben).

§. 72. Lehrs. Theilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile, und verbindet je zwei aufeinander folgende Theilungspunkte der Peripherie durch Gerade (Sehnen), so erhält man ein reguläres in den Kreis beschriebenes n Eck.

Bew. Es sey (Fig. 62) Bog. AB = BD = DE.... so ist Sehne AB = BD = DE.... (§. 63. Zus. 1.) Da die Peripherie in n gleiche Theile getheilt ist, so ist Bogen AFD = (n — 2) mal Bogen AB; eben so Bogen BGE = (n — 2) mal Bogen **AB**; daher Bogen **AFD** = Bogen **BGE**; also ∧ **ABD** = ∧ **BDE** = ∧ **DEF**.... (§. 65. Zus. 1.); daher im Polygon alle Seiten und Winkel gleich; dasselbe ist also regulär: zugleich liegen alle Ecke der Figur in der Peripherie des Kreises; daher die Figur in den Kreis beschrieben.

Zus. Halbirt man die Bogen eines regulären n Ecks im Kreise, so kann man, wenn man die entsprechenden Sehnen zieht, ein reguläres 2n Eck, durch neue Halbirungen ein reguläres 4n Eck.... beschreiben.

§. 73. Lehrs. Theilt man die Peripherie eines Kreises in n gleiche Theile, und legt durch die Theilungspunkte Tangenten an den Kreis, die man verlängert, bis je zwei benachbarte sich schneiden, so erhält man ein reguläres n Eck um den Kreis.

Bew. Es sey (Fig. 62.) Bog. **AB** = **BD** = **DE**...; die durch **A**, **B**, **D**.... gelegten Tangenten seyen KL, LM.... Nun hat man: ∧ m = ∧ q = ∧ x = ∧ y = ∧ r.... (§. 67. §. 65. Zus. 1.); und da auch **AB** = **BD** = **DE**... (§. 63. Zus. 1), so ist △ **AKB** ≌ **BLD** ≌ △ **DME**.... (III.); und da überdieß **KA** = **KB**; **LB** = **LD**.... (§. 70. Zus.), so ist auch

$KB + BL = LD + DM$, oder $KL = LM$ u. s. f.; und $K = L = M \ldots$

Es sind also im Polygon alle Seiten und Winkel gleich, mithin das Polygon regulär; und die Seiten sind nach der Voraussetzung Tangenten; also die Figur um den Kreis beschrieben.

§. 74. In und um jedes reguläre Polygon läßt sich ein Kreis beschreiben.

Bew. Es ist zu zeigen, daß es im Polygon einen Punkt gebe, der von allen Seiten und Ecken gleich weit entfernt ist.

Sey nun **ABDEFG** (Fig. 63.) ein reguläres Polygon.

Wir halbiren zwei an einer Seite **AB** liegende Winkel **A** und **B**, so müssen diese Halbirungslinien sich schneiden; denn da

$$\wedge A = 2R - \frac{4R}{n} \text{ (§. 20. Zus. 4.), so ist:}$$

$$\begin{array}{ll} A & < 2R; \text{ daher} \\ m (= \tfrac{1}{2}A) & < R; \text{ eben so} \\ x & < R; \text{ mithin} \\ \hline m + x & < 2R \text{ (§. 12.)} \end{array}$$

Da $\wedge A = \wedge B$ (Dat.), so ist $\frac{1}{2}A = \frac{1}{2}B$; oder $m = x$; mithin $AC = BC$ (§. 29. Zus. 4.). Zieht man **CD**, so ist:

$$\begin{array}{l} AB = BD \text{ (Dat.)} \\ BC = BC \\ \wedge x = \wedge y \end{array}$$

daher $\triangle ABC \cong \triangle BCD$ (I.); also $CD = CA = CB \ldots$ daher sind alle Ecke vom Punkte **C** gleichweit entfernt; mithin geht ein aus **C** mit **CA** beschriebener Kreis durch **A**, **B**, **D** ....

Wir ziehen nun **CP** senkrecht auf **AB**, **CQ** senkrecht auf **BD**, so ist: $BP = \frac{1}{2}BA = \frac{1}{2}BD = BQ$ (§. 29. Zus. 6.); also $\triangle BCP \cong \triangle BCQ$ (I.); daher $CP = CQ \ldots$ Mithin sind alle Senkrechten von **C** auf die Seiten des Polygons gleich; daher ein Kreis aus **C** mit **CP** beschrieben alle Polygonsseiten berührt.

Zus. 1. Der Punkt **C** heißt Polygonsmittelpunkt.

Zus. 2. Da $\wedge ACB = BCD \ldots$ so sind diese Winkel (Centriwinkel des Polygons) einander gleich, daher jeder Winkel $= \frac{4R}{n}$.

Zus. 3. Jedes reguläre n Eck läßt sich in n kongruente Dreiecke theilen, deren jedes eine Seite als Basis, und die Entfernung vom Mittelpunkte als Höhe hat. Ein reguläres Polygon ist daher einem Dreiecke gleich, dessen Basis dem Umfange und dessen Höhe der Entfernung einer Seite vom Mittelpunkte gleich ist (§. 37. Zus. 3).

§. 75. Lehrs. Um und in jedes Dreieck läßt sich ein Kreis beschreiben.

Bew. Da ein Kreis um ein Dreieck beschrieben ist, wenn die Peripherie durch die drei Ecke des Dreiecks geht, so reduzirt sich dieser Fall auf §. 60., wenn man die Scheitel der Dreieckswinkel als jene Punkte betrachtet, durch welche die Peripherie gehen soll; die Dreiecksseiten selbst sind dann Sehnen.

Um zu zeigen, daß in jedes Dreieck ein Kreis beschrieben werden könne, muß nachgewiesen werden, daß es innerhalb des Dreiecks einen Punkt gebe, von dem die auf die Dreiecksseiten gefällten Perpendikel einander gleich sind. Dieser Punkt aber ist der Durchschnitt zweier Geraden, welche zwei Dreieckswinkel beziehungsweise halbiren.

Ist nemlich (Fig. 64.) **O** der Durchschnittspunkt der Geraden **AO**, **GO**, welche beziehungsweise die Winkel **BAG**, **BGA** halbiren und man zieht **OD**, **OE**, **OF** nach der Reihe senkrecht auf **AG AB**, **BG**; so ist: $OD = OE = OF$; denn $AO = AO$; $\wedge EAO = OAD = \frac{1}{2} \wedge EAD$; $\wedge AEO = R = \wedge ODA$; daher $\Delta EAO \cong \Delta DAO$ (III;) also auch $OD = OE$; ebenso läßt sich zeigen, daß $DO = OF$ ist; es muß also ein aus **O** mit **OD** beschriebener Kreis alle Seiten des Dreiecks berühren: daher der Kreis in das Dreieck beschrieben.

Daß sich die Halbirungslinien **AO**, **GO** schneiden müssen, erhellt, weil $\wedge A + G < 2R$ (§. 20. Zus. 2.); also um so mehr $\frac{1}{2} A + \frac{1}{2} G < 2R$ (§. 12.)

§. 76. Lehrs. Die Perimeter zweier regulären n Ecke verhalten sich, wie die Radien (oder Durchmesser) der in oder um die Polygone beschriebenen Kreise.

Bew. Seyen die beiden Polygone: **ABDEFG**, abdefg, und **C**, c die Mittelpunkte der in und um die Polygone beschriebenen Kreise. (**Fig.** 65.)

Nach § 56. hat man:

$$\text{Perim. } AB \ldots G : \text{perim. } ab \ldots g = AB : ab$$

Nun ist $\wedge BCA = \frac{4R}{n} = \wedge bca$ (§. 74. Zus. 2)

$\wedge B = \wedge A = \wedge b = \wedge a$ (Dat.) also:

$\frac{1}{2} \wedge B = \frac{1}{2} \wedge A = \frac{1}{2} \wedge b = \wedge \frac{1}{2} a$; oder

$\wedge CBA = \wedge CAB = \wedge cba = \wedge cab$; daher:

$\triangle BCA \backsim \triangle bca$ (§. 54.) daher:

$AB : ab = BC : bc = KC : kc$ (§. 57. Zus. 1.)

Daher durch gehörige Substitution:

$$\text{Perim. } AB \ldots G : \text{perim. } ab \ldots g = BC : bc = KC : kc$$

Zus. 1. Nach §. 3. ist die Peripherie des Kreises größer, als der Perimeter eines in den Kreis beschriebenen regulären n Eckes; aber aus demselben Grunde ist der Perimeter des 2n Eckes im Kreise größer, als der Perimeter des n Eckes; man hat also:

$$\text{Peripherie} = \text{Peripherie}$$
$$\text{Perim. } 2n \text{ Eck} > \text{Perim. } n \text{ Eck; daher}$$
$$\text{Periph.} - \text{Perim. } 2n \text{ Eck} < \text{Periph.} - \text{Perim. } n \text{ Eck}$$

d. h. der Unterschied der Peripherie eines Kreises und des Perimeters eines in den Kreis beschriebenen n Ecks wird um so kleiner, je größer n ist.

Zus. 2. Die Peripherie eines Kreises ist kleiner, als der Perimeter eines um den Kreis beschriebenen regulären n Eckes; aber der Perimeter des um den Kreis beschriebenen 2n Eckes ist kleiner, als der Perimeter des n Eckes: man hat also:

$$\text{Perim. } 2n \text{ Eck} < \text{Perim. } n \text{ Eck}$$
$$\text{Periph.} = \text{Periph.; daher}$$
$$\text{Perim. } 2n \text{ Eck} - \text{Periph.} < \text{Perim. } n \text{ Eck} - \text{Periph.}$$

d. h. der Unterschied der Peripherie eines Kreises und des Perimeters eines um den Kreis beschriebenen n Eckes wird um so kleiner, je größer n wird

Zus. 3. Was von der Peripherie eines Kreises rücksichtlich der Perimeter der in und umschriebenen Polygone gilt, gilt auf gleiche Weise auch von der Kreisfläche, mit den Flächen der in und umschriebenen Polygone verglichen.

Zus. 4. Da nach Zus. 1. und Zus. 2. die Peripherie die Grenze ist, der sich die Perimeter der in und umschriebenen Polygone nähern, so kann der Kreis selbst als ein Polygon von unendlich viel Seiten betrachtet werden; daher verhalten sich dann die Peripherien zweier Kreise, wie ihre Halb- oder Durchmesser.

Zus. 5. Da die Flächen regulärer n Ecke sich verhalten, wie die Quadrate homologer Seiten, so folgt aus Lehrsatz, daß die Flächen von zwei regulären n Ecken sich verhalten, wie die Quadrate der Radien (Durchmesser) der in oder um die Polygone beschriebenen Kreise.

Zus. 6. Aus Zus. 3. und Zus. 5. folgt dann, daß zwei Kreisflächen sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Halb- oder Durchmesser.

Anhang

zum fünften Abschnitte.

§. 77. Aufgaben. 1. Durch einen gegebenen Punkt eine Tangente an einen gegebenen Kreis legen (Fig. 66.).

Aufl. a. Ist der gegebene Punkt A in der Peripherie des gegebenen Kreises, so ziehe man den Halbmesser CA; errichte auf CA durch A die Senkrechte AB, so ist AB die verlangte Tangente.

Bew. §. 61.

Aufl. b. Ist der gegebene Punkt D außerhalb der Peripherie, so ziehe man die Gerade CD; halbire CD in O, und beschreibe aus O mit dem Halbmesser $OD = OC$ einen Kreis, der die Peripherie des gegebenen Kreises schneidet in E, ziehe ED, so ist sie die verlangte Tangente.

Bew. Man ziehe CE, so ist $\wedge CED = R$ (§. 65. Zus. 2.); daher DE die verlangte Tangente.

2. Ein Dreieck in einen Kreis beschreiben, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist.

Aufl. Das gegebene Dreieck (Fig 67.) sey BAC. Durch einen beliebigen Punkt D der Peripherie des gegebenen Kreises ziehe man die Tangente KL. An DL verzeichne man $\wedge MDL = \wedge ABC$; an DK verzeichne man $\wedge PDK = \wedge BCA$; ziehe PM, so ist $\Delta PDM \backsim BAC$.

Bew. $\wedge MDL = \wedge ABC$ (constr.); $\wedge MDL = \wedge DPM$ (§. 67.); daher $\wedge DPM = ABC$; eben so ist $\wedge PDK = \wedge PMD = \wedge BCA$; daher $\Delta PDM \backsim \Delta BAC$ (§. 54.).

3. Um einen Kreis ein Dreieck beschreiben, das einem gegebenen Dreiecke ähnlich ist (Fig. 68.).

Aufl. Das gegebene Dreieck sey ABD. Man verlängere AD nach E und F; verzeichne den Centriwinkel $LCK = \wedge BAE$; eben so: $\wedge KCM = \wedge BDF$; ziehe durch M, L, K Tangenten an den Kreis, bis sie sich schneiden in P, R, Q so ist Δ PRQ das verlangte.

Bew. $\wedge CLR = \wedge CKR = R$ (§. 61.); daher

$\wedge LCK + \wedge LRK = 2R$ (§. 20. Zus. 3.); es ist auch:

$\wedge BAE + \wedge BAD = 2R$; mithin

$\wedge LCK + \wedge LRK = \wedge BAE + \wedge BAD$; nun ist:

$\wedge LCK \quad = \wedge BAE$ (const.); daher

$\wedge LRK \quad = \wedge BAD$

Eben so ist: $KQM = \wedge BDA$; daher $\Delta PQR \backsim \Delta ADB$ (§. 54.).

4. In einen Kreis ein Quadrat beschreiben (Fig 69.).

Aufl. Man ziehe zwei sich senkrecht schneidende Durchmesser AB, DE; ziehe die Geraden AD, DB, BE, EA, so ist ADBE das verlangte Quadrat.

Bew. $ACD = \wedge DCB \ldots = R$; daher $AD = DB = BE = EA$ (§. 63.); eben so: $\wedge ADB = R = \wedge DBE \ldots$ (§. 65. Zus. 2.); mithin das Viereck ein Quadrat und in den Kreis beschrieben.

Anmerk. 1. Der vierte Theil des Kreises heißt Quadrant.

Anmerk. 2. Man kann auf ähnliche Weise ein Quadrat um den Kreis beschreiben; ferner nach §. 72. Zus. ein reguläres 8, 16.... Eck in und um den Kreis beschreiben.

5. Ein reguläres Sechseck in den Kreis beschreiben (Fig. 65.).

Aufl. Man mache die Sehne AB gleich dem Radius BC des Kreises, so ist AB die Seite des regulären Sechsecks.

Bew. Es ist AB = BC = AC; daher Dreieck ABC gleichseitig; mithin $\wedge$ BCA $= \frac{2}{3}$R (§. 26. Zus. 3.); es ist aber der Centriwinkel des regulären Sechseckes $= \frac{2}{3}$R (§ 74. Zus. 2.); daher AB die Seite des regulären Sechsecks.

Anmerk. 1. Der sechste Theil des Kreises heißt Sextant.

Anmerk. 2. Ist Sehne BD = BA, und man zieht AD so ist AD die Seite des regulären Dreiecks im Kreise.

Man kann ein reguläres 3, 6.... Eck um den Kreis beschreiben.

6. Ein reguläres Zehneck in den Kreis beschreiben.

Aufl. Es sey (Fig. 70.) der Radius CA des gegebenen Kreises im Punkte B im mittlern und äußern Verhältnisse getheilt (§. 59. 11.). Man mache die Sehne AD gleich dem größern Theil CB des so getheilten Radius, so ist AD die Seite des regulären Zehnecks.

Bew. Zu zeigen ist, daß, wenn man CD zieht, $\wedge$ACD $= \frac{2}{5}$R sey. Wir ziehen DB, so hat man:

CA : CB = CB : AB (const.); oder:

CA : AD = AD : AB (const.); da nun

$\wedge$CAD = $\wedge$BAD, so ist $\triangle$CAD $\backsim$ $\triangle$DAB (§. 52); mithin $\wedge$CDA = $\wedge$DBA; $\wedge$ACD = $\wedge$BDA; also auch, (da $\wedge$CAD = $\wedge$CDA) $\wedge$DAB = $\wedge$DBA; also auch DA = DB = BC (§. 29.) Zus. 4); daher auch: BCD = $\wedge$BDC = $\wedge$BDA; nun ist: $\wedge$ACD + $\wedge$CDA + $\wedge$CAD = 2R (§. 20. Zus. 2.) oder $\wedge$ACD + CDB + $\wedge$BDA + ($\wedge$CDB + $\triangle$BDA) = 2R; oder 5. $\wedge$ACD = 2R; also

$$\wedge \text{ ACD} = \frac{2R}{5}.$$

Mithin ist AD die Seite des regulären Zehnecks.

Anmerk. 1. Macht man Sehne DE = DA, und zieht AE, so ist AE die Seite des regulären Fünfecks im Kreise.

Anmerk. 2. Ist AK die Seite eines regulären Dreiecks, AE die Seite eines regulären Fünfecks, so ist:

$$\text{Bog. ADEK} = \tfrac{1}{3}\,\text{Periph.}$$
$$\text{Bog. ADE} = \tfrac{1}{5}\,\text{Periph.};\ \text{daher}$$

$$\text{Bog. ADEK} - \text{Bog. ADE} = \tfrac{1}{3}\,\text{Periph.} - \tfrac{1}{5}\,\text{Periph};\ \text{oder}$$
$$\text{Bog. EK} = \tfrac{2}{15}\,\text{Periph.}$$

Halbirt man EK in M, so ist KM $= \frac{1}{15}$ Periph.; mithin die Sehne KM, die Seite des regulären 15 Ecks im Kreise.

7. Aus der Seite des regulären n Ecks = a im Kreise die Seite des regulären 2n Eckes = b im Kreise zu finden.

Aufl. (Fig. 70.) Sey CF = CL = r; QF = a. Zieht man CO senkrecht auf QF, und verlängert sie bis L, so ist, da $\wedge$FCL = $\wedge$QCL (§. 63. Zus. 3); Bog. LF = Bog. LQ = Bog. $\frac{1}{2}$FQ; FO = OQ = $\frac{1}{2}$FQ = $\frac{1}{2}$a; LF = b, also die Seite des 2n Eckes, wenn FQ = a die Seite des n Eckes ist. Nun hat man:

$$LF^2 = b^2 = FO^2 + OL^2$$
$$b^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + OL^2$$
$$OL = LC - OC$$
$$OL = r - OC$$
$$OC = \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$
$$OL = r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}$$
$$b^2 = \tfrac{1}{4}a^2 + \left(r - \sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}\right)^2;\ \text{daher}$$
$$b^2 = 2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2};\ \text{mithin}$$
$$b = \sqrt{\left(2r^2 - 2r\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}a^2}\right)}$$

Zus. Aus der eben abgeleiteten Gleichung ergibt sich:

$$a = \frac{b}{r}\sqrt{(2r + b)\,(2r - b)}$$

8. Aus der Seite eines regulären n Eckes = p im Kreise; die Seite eines regulären n Eckes = q um den Kreis zu finden.

Aufl. (Fig 62.) Ist LM = q die Seite eines regulären n Eckes um den Kreis, FE = p die Seite eines regulären n

Eckes im Kreise, so ist, wenn C der Mittelpunkt des Kreises ist: $\triangle CML \backsim \triangle ECF$ (§. 54); daher, wenn CO senkrecht auf FE ist:

$$CO : FE = CD : LM \text{ (§. 57. Zus. 1.); oder}$$

$$\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}p^2} : p = r : q; \text{ daher}$$

$$q = \frac{pr}{\sqrt{r^2 - \tfrac{1}{4}p^2}} = \frac{2rp\sqrt{(2r+p)(2r-p)}}{(2r+p)(2r-p)}$$

Zus. Aus vorstehender Gleichung folgt:

$$p = \frac{2rq\sqrt{4r^2+q^2}}{4r^2+q^2}.$$

Sechster Abschnitt.

Messung der Winkel, Linien und Flächen.

§. 78. Erkl. Geometrische Größen werden gemessen, wenn man eine beliebige gleichartige Größe als Einheit nimmt, und angibt, wie oft diese in der gegebenen Größe enthalten ist (vergl. Einleit. §. 1). Die geometrischen Größen werden in dieser Hinsicht als (benannte) Zahlen behandelt, und die in der Arithmetik aufgestellten Gesetze für Zahlenverbindungen finden auch hier statt. Wenn wir daher vom Multipliziren, Dividiren.... geometrischer Größen sprechen, so gilt dieß immer nur von den Zahlen, durch welche die geometrischen Größen repräsentirt werden.

§. 79. Erkl. Das Maß für Winkel ist der rechte, als die Hälfte des Geraden; um aber auch Winkel messen zu können, die nicht genau einen rechten, oder ein Mehrfaches von rechten Winkeln betragen, theilt man den rechten Winkel in 90 gleiche Theile, Grade genannt; jeden Grad theilt man in 60 gleiche Theile, Minuten, jede Minute in 60 Sekunden; noch kleinere Theile drückt man gewöhnlich in Dezimaltheilen von Sekunden aus. Bezeichnet $1^\circ = 90'$; $1' = 60''$.

Die Winkel jedes Dreiecks betragen also 180°.

Für die einfachsten regulären Polygone hat man:

	Polygonswinkel	Centriwinkel
Im 3eck . . .	60°	120°
„ 4eck . . .	90°	90°
„ 5eck . . .	108°	72°
„ 6eck . . .	120°	60°
„ 7eck . . .	128° 34′ 17″, 14	51° 25′ 42″ 85
„ 8eck . . .	135°	45° u. s. f.

Wenn also die Zahl der Seiten wächst, wächst auch der Polygonswinkel; der Centriwinkel aber nimmt ab. Beide ergänzen sich zu 180° (Supplementswinkel).

§. 80. Erkl. Um Linien zu messen, hat man eine willkührliche Gerade als Einheit, gewöhnlich Fuß oder Schuh genannt; in Bayern wird der Fuß, als geometrischer Fuß, eingetheilt in 10 Zoll; der Zoll in 10 Linien, die Linie in 10 Scrupel; 10 Fuß geben eine Ruthe. 12703 Fuß sind eine bayerische Chaussée-Stunde, deren zwei eine Meile machen (die deutsche Meile = 25380 bayerische Fuß).

Der nemliche Fuß wird im bürgerlichen Leben als Werkschuh im 12 Zoll, der Zoll in 12 Linien .... getheilt; 6 Fuß geben eine Klafter.

Bezeichnet: 3° 6′ 5″ 2‴ 7⁗; gelesen: 3 Ruthen, 6 Fuß, 5 Zoll, 2 Linien, 7 Scrupel.

Das merkwürdigste Maß der neuern Zeit ist das französische Dezimalmaß; die Einheit dieses Maßes ist der zehnmillionteste Theil des Erdmeridianquadranten, und heißt métre; die Oberabtheilungen werden durch griechische, die Unterabtheilungen durch lateinische Zahlwörter ausgedrückt; man hat also:

1 métre = 10 decimétres = 100 centimétres = 1000 millimetres. 1 mètre = 0,1 decamétre = 0,01 hectométre = 0,001 Kilométre = 0,0001 myriamétre.

Zur Reduktion hat man folgende Gleichungen:

1 bayerischer Fuß = 0,291859 mètre = 0,898472 alte Pariser Fuß.

1 mètre = 3,426309 bayerische Fuß = 3,078444 Pariser Fuß.

1 Pariser Fuß = 1,113007 bayerische Fuß = 0,324840 mètre. 6 Pariser Fuß geben eine Toise.

§. 81. Erkl. Um Flächen zu messen, hat man als Einheit ein Quadrat, dessen Seite ein bekanntes Längenmaß seyn muß; in Bayern der Fuß, daher Quadratfuß.

Ist der Längenfuß in 10 Zoll getheilt, und man denkt sich ein Quadrat, dessen Seite ein Zoll ist, so hat man, da alle Quadrate einander ähnlich sind:

1 Quadratzoll : 1 Quadratfuß = $1^2 : 10^2$ (§. 57. Zus. 2.);

daher: $1\square' = 100\square''$; also $1\square'' = 100\square'''$ ....

$40000\square'$ geben ein bayerisches Tagwerk.

Ist das Verhältniß zweier Linien gegeben, so verhalten sich die über den Linien construirten Quadrate, wie die Quadrate der die Linien ausdrückenden Zahlen; man hat daher:

$1\square'$ bayerisch : $1\square$ métre = $1^2 : (3{,}426309)^2$; daher: $1\square$ métre = $11{,}73959\square'$.

Im französischen Maße hat man als Einheit des Flächenmaßes das Quadrat des Decamétre (Are genannt); rechnet aber nach Hectare = 100 Ares; daher:

1 Hectare = $117395{,}9\square'$ = 2 Tagw. $37395{,}9\square'$.

Um Flächen in ähnliche kleinere zu verwandeln u. s. f., ist ein Maßstab nothwendig.

§ 82. Erkl. Die Kreislinie kann in doppelter Hinsicht gemessen werden; 1) als Linie; man denkt sich nemlich die Kreislinie als gerade ausgestreckt, und gibt an, wie oft das als Einheit gebrauchte Längenmaß in ihr enthalten sey; dieß heißt die Kreislinie rektifiziren; oder 2) man theilt die Peripherie eines jeden Kreises in 360 Theile, Grade genannt; da nun der ganzen Peripherie vier rechte (Centri-) Winkel entsprechen, die zusammen auch 360° ausmachen, zu gleichen Centriwinkeln aber gleiche Bogen gehören, so sagt man in dieser Beziehung, der Bogen sey gleich seinem Centriwinkel, und umgekehrt, da nemlich beide gleich viele Grade enthalten; daher auch der Peripheriewinkel

gleich seinem halben Bogen. Die Fläche des Kreises wird durch das gewöhnliche Flächenmaß gemessen.

§. 83. Erkl. Bei der Messung der Figuren untersuchen wir entweder den Umfang, oder die Fläche, oder beides.

§. 84. Mißt man jede einzelne Seite einer Figur mit einem und demselben Maße, so gibt die Summe aller Seiten offenbar den Umfang der ganzen Figur; daher der Umfang des Parallelogramms $= 2(a + b)$, wenn wir mit a und b zwei anstoßende Seiten bezeichnen; der Umfang des gleichseitigen Dreiecks $= 3a$; des Quadrats $= 4a$, des regulären n Ecks $= na$, wenn wir eine Seite jedesmal mit a bezeichnen.

§. 85. Um die Peripherie eines Kreises zu messen, berücksichtigt man (§. 76. Zus. 1. Zus. 2), daß sie größer als der Umfang eines regulären n Eckes in, und kleiner, als der eines regulären n Eckes um den Kreis sey. Nun ist (§. 77. 5.) im Kreise die Seite eines regulären

6 Eckes $= r$

12 „ $= r\sqrt{2-\sqrt{3}}$ (§. 77. 7.)

24 „ $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$

48 „ $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}$

96 „ $= r\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}}}}$ u. s. f.

Die Seite des 96 Eckes findet man, wenn man $r = 1$ setzt: 0,0654333; daher der Umfang des 96 Eckes $=$ 6 2815968.

Eben so hat man (§. 77. 8.) um den Kreis die Seite des regulären

$$6 \text{ Eckes} = \tfrac{2}{3} r\sqrt{3}$$

$$12 \text{ Eckes} = r\sqrt{4-2\sqrt{3}} \text{ u. s. f.}$$

Die Seite des 96 Eckes findet man $=$ 0,0654732; daher dessen Umfang $=$ 6,2854272; oder da man in der elementaren Geometrie gewöhnlich den Durchmesser $= 1$ setzt, so hat man den Umfang des 96 Eckes im Kreise $=$ 3,1407984; den Um-

fang des 96 Eckes um den Kreis $=3{,}1427130$; daher ist für den Durchmesser 1 der Umfang des Kreises $= 3,\ 14\ldots.$

Berechnet man Vielecke mit noch mehr Seiten, so erhält man die Peripherie immer genauer, nemlich:

$$3{,}141592653589\ \ldots. = \pi$$

welche Zahl (mit π bezeichnet) die Ludolphische genannt wird.

Da sich die Peripherien zweier Kreise wie ihre Halb- oder Durchmesser verhalten, so hat man:

$$p : p, = d : d, = r : r,$$

Setzt man nun $d, = 1$; so ist $p, = \pi$; daher hat man:

$$p : \pi = d : 1;\ \text{also:}$$

$$p = d\pi = 2r\pi$$

Man erhält also die Peripherie eines Kreises, wenn man den Durchmesser (oder doppelten Radius) mit der Ludolphischen Zahl multiplizirt; man hat auch:

$$d = \frac{p}{\pi} = 2r.$$

Zus. 1. Man erhält den Bogen (= arc.) von n^o nach der Proportion:

$$n^o : 360^o = \text{arc} : 2r\pi\ (=p);\ \text{daher}$$

$$\text{arc} = \frac{n^o r\pi}{180^o}.$$

Zus. 2. Die Seite des regulären Dreiecks im Kreise ist $= r\sqrt{3}$; um den Kreis $= 2r\sqrt{3}$; des Vierecks im Kreise $= r\sqrt{2}$; des Zehnecks $= r\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$; des Fünfecks

$$= r\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}\ \text{u. s. f.}$$

§. 86. Lehrs. Man erhält die Fläche eines jeden Parallelogramms, wenn man die Höhe mit der Grundlinie multiplizirt.

Bew. Sey das gegebene Parallelogramm AC (Fig. 71.); dessen Basis AD, Höhe BE; es sey ac ein Quadrat, dessen Seite ad die Einheit des Längenmasses ausdrückt, so ist dessen Höhe $ab = ad$; nun hat man:

ac : AC = ab × ad : AD × BE; (§. 45. Zus. 1.); oder
$1\square'$: AC = 1 . 1 : AD . BE; daher
AC = AD . BE$\square'$, oder
Parlgr. = g . h

Zus. 1. Bezeichnen wir die Fläche eines Quadrates mit Q, dessen Seite mit a, so hat man: $Q = a^2$, eben so: $a = \sqrt{Q}$.

Zus. 2. Bezeichnen wir die Fläche eines Dreiecks mit Δ, dessen Grundlinie mit g, Höhe mit h, so ergibt sich:

$$\Delta = \frac{g \cdot h}{2}$$

d. h. man erhält die Fläche eines Dreiecks, wenn man die Grundlinie mit der halben Höhe multiplizirt.

Zus. 3. Sey gegeben ein Trapez = Tr., die eine Parallele BD=P (Fig. 72.); die andere Parallele AC=p, und die Entfernung beider Parallelen (Höhe) CE=h, so hat man, wenn man die Diagonale BC zieht:

Tr. = Δ BAC + Δ BCD; oder

$$\text{Tr.} = \frac{AC \times CE}{2} + \frac{BD \times CE}{2}; \text{ d. h.}$$

$$\text{Tr.} = (P + p)\,\frac{h}{2}$$

Man erhält die Fläche eines Trapezes, wenn man die Summe der Parallelen mit der halben Höhe multiplizirt.

Zus. 4. Die Fläche jedes irregulären Vielecks findet man, wenn man dasselbe durch Diagonalen in Dreiecke zerlegt, und die Dreiecke nach Zus. 2. einzeln berechnet; die Summe aller Dreiecke gibt das Vieleck.

§. 87. Lehrs. Die Fläche des regulären n Eckes erhält man, wenn man das n fache Produkt einer Seite in die Entfernung des Mittelpunktes von einer Seite mit 2 dividirt; d. i. wenn wir (Fig. 63.) die Seite AB mit a, die genannte Entfernung CP mit h bezeichnen, so erhält man:

$$\text{Polyg.} = \text{na} \,.\, \frac{h}{2} = \text{Umfang} \times \frac{h}{2}.$$

Bew. Offenbar hat man $\triangle ACB = \frac{AB \,.\, CP}{2} = \frac{a \,.\, h}{2}$; nun enthält das Polygon n solche Dreiecke, die alle kongruent sind; daher:

$$n \,.\, \triangle ACB = \text{Polyg.} = \frac{na \,.\, h}{2}.$$

§. 88. Lehrs. Man erhält die Fläche eines Kreises, wenn man das Quadrat des Radius mit der Ludolphischen Zahl multiplizirt; wenn man also die Kreisfläche mit K, Radius mit r (Durchmesser = d) bezeichnet so ergibt sich:

$$K = r^2 \pi = \tfrac{1}{4} d^2 \pi.$$

Bew. Nach §. 76. Zus. 4. ist die Fläche eines Kreises gleich einem Polygone, dessen Umfang die Peripherie, dessen Höhe der Radius ist. Man hat daher (§. 87.) $K = \frac{p \,.\, r}{2}$.

Nun ist $p = 2r\pi$ (§. 85); also:

$$K = \frac{2r\pi \,.\, r}{2} = r^2\pi = \tfrac{1}{4} d^2\pi; \text{ woraus folgt:}$$

$$r = \sqrt{\frac{K}{\pi}}.$$

Zus. 1. Enthält der Ausschnitt eines Kreises n Grade, so hat man, den Sektor mit S bezeichnend:

$$K : S = 360^\circ : n^\circ; \text{ also}$$

$$S = \frac{Kn^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2\pi n}{360}.$$

Zus. 2. Die Fläche des Kreisringes A, zwischen zwei concentrischen Kreisen, deren Radien r, $r_{,}$ sind, ergibt sich aus der Gleichung:

$$A = r^2\pi - r_{,}^2\pi = \pi\,(r + r_{,})\,(r - r_{,}).$$

Anhang

zum sechsten Abschnitte.

§. 89. Aufgaben. 1. Ein gegebenes Rechteck in ein Quadrat verwandeln (Fig. 73.).

Aufl. Das gegebene Rechteck sey AD; verlängere AE bis F, so daß $EF = ED$; halbire AF in C; beschreibe aus C mit $CA = CF$ einen Kreis, so schneidet dieser die DE oder ihre Verlängerung in K; KE ist die Seite des verlangten Quadrats.

Bew. Zieht man AK, KF, so ist $\wedge AKF = R$ (§. 65. Zus. 2.); daher: $AE:EK:EF$ (§. 58. Zus. 1.); also

$$EK^2 = AE \,.\, EF \text{; oder}$$

$$EK^2 = AE \,.\, ED \text{ (vergl. §. 86. Lehrs. u. Zus. 1.)}$$

Zus. 1. Die Aufgabe, ein Rechteck in ein Quadrat zu verwandeln, ist also identisch mit jener, zu zwei gegebenen Geraden die mittlere Proportionallinie finden.

Zus. 2. Es läßt sich jede geradlinige Figur in ein Quadrat verwandeln (§. 59. 4. Zus.).

2. Die Fläche eines Dreiecks aus dessen drei Seiten finden.

Aufl. (Fig. 17.). Offenbar hat man: $\Delta ABC = \frac{AC \times BD}{2}$.

Bezeichnen wir nun AB, BC, AC der Reihe nach durch c, a, b, so hat man:

$$BD^2 = c^2 - AD^2 = a^2 - DC^2 \text{; daher}$$

$$c^2 - AD^2 = a^2 - DC^2 \text{; oder } (DC = b - AD)$$

$$c^2 - AD^2 = a^2 - (b - AD)^2 \text{; daraus erhält man:}$$

$$AD = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b} \text{; da nun:}$$

$$BD^2 = (c + AD)(c - AD) \text{; so hat man:}$$

$$BD^2 = \left(c + \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right)\left(c - \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2b}\right)$$

$$= \frac{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}{4b^2} \text{; daher}$$

$$BD = \frac{\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}}{2b} = \frac{m}{2b}.$$

Nun ist $\Delta ABC = \frac{AC \times BD}{2} = \frac{AC}{2} \,.\, BD = \frac{b}{2} \,.\, \frac{m}{2b}$; also:

$$\Delta ABC = \tfrac{1}{4} m.$$

Zus. Für das gleichseitige Dreieck hat man:

$$\Delta = \tfrac{1}{4}\sqrt{3a \,.\, a \,.\, a \,.\, a} = \tfrac{1}{4}a^2\sqrt{3} = 0{,}433a^2.$$

3. Aus den drei Seiten eines Dreiecks den Radius $= r$ des eingeschriebenen Kreises finden (Fig. 64.).

Aufl. Man hat offenbar:

$$\triangle AOG = \frac{AG \,.\, OD}{2}; \ \triangle AOB = \frac{AB \,.\, OE}{2}; \ \triangle GOB = \frac{GB \,.\, OF}{2};$$

daher, wenn wir die Dreiecksseiten mit a, b, c, bezeichnen:

$$\triangle ABG = \left(\frac{a + b + c}{2}\right) . \, r; \text{ also:}$$

$$r = \frac{2\triangle}{a + b + c}.$$

4. Aus den drei Seiten eines Dreiecks den Radius $= r$ des umschriebenen Kreises finden (Fig. 67.).

Aufl. Man ziehe den Durchmesser DE, DR senkrecht auf PM, und die Gerade PE; so ist $\triangle DPE \backsim \triangle DRM$; denn $\wedge DPE = R = \wedge DRM$; $\wedge PED = \wedge RMD$ (§. 65. Zus. 2. Zus. 1.); daher:

$$DE : DP = DM : DR; \text{ also:}$$

$$DE \,.\, DR = DP \,.\, DM; \text{ oder: } DR = \frac{DP \,.\, DM}{DE}.$$

Nun ist $\triangle DPM = \frac{PM \,.\, DR}{2} = \frac{PM}{2} \,.\, \frac{PD \,.\, DM}{DE} = \frac{abc}{2 \,.\, 2r} = \frac{abc}{4r}$; also:

$$r = \frac{abc}{4\triangle}.$$

II. Stereometrie.

Erster Abschnitt.

Lage gerader Linien und Ebenen gegen einander.

A. Lage gerader Linien gegen Ebenen.

§. 90. Erkl. Eine Gerade liegt ganz in einer Ebene, wenn sie zwei Punkte in ihr hat (Vergl. §. 4.).

Zus. Eine Gerade kann eine Ebene nur in einem Punkte schneiden; dieser Punkt heißt Fußpunkt der Geraden. Denkt man sich in diesem Falle die Gerade beiderseits verlängert, so wie die Ebene allerseits erweitert, so liegt die Gerade zum Theil auf der einen, zum Theil auf der andern Seite der Ebene.

§. 91. Lehrs. Durch drei, nicht in gerader Linie liegende Punkte ist eine, aber nur eine Ebene bestimmt.

Bew. Man ziehe zwischen zwei der gegebenen Punkte eine Gerade, und lege eine Ebene durch diese Gerade. Man kann nun diese Ebene, gehörig erweitert, um die Gerade so lange drehen, bis auch der dritte Punkt in ihr liegt; nun aber ist die Lage der Ebene bestimmt; denn bei weiterer Drehung würde der dritte Punkt aufhören, in ihr zu liegen.

Zus. 1. Durch zwei sich schneidende Gerade, oder durch ein Dreieck, oder zwei Parallellinien, oder einen Kreisbogen ist die Lage einer Ebene bestimmt.

Zus. 2. Man kann zwei Ebenen, die einen Punkt gemeinschaftlich haben, immer so erweitern, daß sie mehrere Punkte gemeinschaftlich haben, aber die gemeinschaftlichen Punkte müssen alle in einer Geraden liegen; denn sonst hätten beide Ebenen drei nicht in gerader Linie liegende Punkte gemeinschaftlich, gegen Lehrsatz. Man heißt diese Linie die Durchschnittslinie der Ebenen, oder den Durchschnitt.

§. 92. Lehrs. Steht eine Gerade **AC** (Fig. 74.) auf zwei Geraden **CB**, **CD**, durch einen Punkt **C** senkrecht, und man legt durch diese beiden Geraden eine Ebene **MN**, so steht **AC** auf jeder Geraden senkrecht, die man durch ihren Fußpunkt **C** in der Ebene **MN** zieht.

Dat. $\wedge ACB = R = \wedge ACD$.

Thes. $\wedge ACL = R$ (wenn **CL** eine beliebige durch **C** in der Ebene **MN** gezogene Gerade ist).

Bew. Man ziehe die Gerade **BD**, welche die **CL** in **E** schneidet; verlängere **AC** bis **K**, so daß $CK = AC$. In der Ebene **ACB** ziehe man **AB**, **BK**, so ist $\triangle ACB \cong \triangle KCB$ (I); daher:
$$AB = KB.$$

Man ziehe ferner AD, KD, so ist $\triangle ACD \cong \triangle KCD$ (I.); daher: $AD = KD$,

also auch: $\triangle ADB \cong \triangle KBD$ (II.); folglich:

$$\wedge ABE = \wedge KBE.$$

Wir ziehen AE, KE, so ist $\triangle ABE \cong \triangle KBE$ (I.); daher:

$$AE = KE.$$

Endlich ist: $\triangle ACE \cong \triangle KCE$ (II.); mithin

$$\wedge ACE = KCE = R.$$

Zus. 1. Da AC auf allen durch ihren Fußpunkt C in der Ebene MN gezogenen Geraden senkrecht steht, so sagt man: die Gerade AC stehe auf der Ebene MN senkrecht. In diesem Falle sagt man auch: die Ebene stehe senkrecht auf der Geraden.

Zus. 2. Steht eine Gerade auf drei (oder mehreren) Geraden durch einen Punkt senkrecht, so liegen alle diese Geraden in einer Ebene. Denn es stehe (Fig. 75.) AC senkrecht auf CB, CE, CD; legen wir eine Ebene durch B, C, E, so liegt auch CD in dieser Ebene; denn läge CD nicht in dieser Ebene, so könnte man durch A, C, D eine Ebene legen; diese würde die Ebene BCE schneiden, etwa in CK; nun hätte man $\wedge ACD = R$ (Dat.); $\wedge ACK = R$ (Lehrs.); also in einer Ebene durch einen Punkt C auf der Geraden AC zwei Senkrechte CK, CD, was nicht möglich ist.

§. 93. Lehrs. Steht von zwei Parallelen die eine auf einer Ebene senkrecht, so steht auch die andere auf der Ebene senkrecht.

Sey (Fig. 76.) $AC \# BD$, und BD senkrecht auf MN; so steht auch AC senkrecht auf MN.

Bew. 1. Ziehe CD; in MN errichte durch C auf CD die Senkrechte $CK = DB$; ziehe CB, KD, so ist

$$\triangle CDB \cong \triangle CKD \text{ (I.)};$$

daher: $CB = KD$.

2. Legt man durch BCK, BDK Ebenen, die sich schneiden in BK, so ist $\triangle BCK \cong \triangle BDK$ (II.); also:

$$\wedge KCB = \wedge KDB = R.$$

3. KC steht also senkrecht auf CB, CD; mithin auf der Ebene CBD (§. 92.), in welcher auch AC liegt (AC ⧺ BD); also;

$\wedge$ACK = R; aber: ACD + $\wedge$BDC = 2R (§. 13. 1.)
$\wedge$BDC = R (Dat.),

daher: $\wedge$ACD = R.

AC steht also senkrecht auf CD, CK; mithin auf der Ebene MN senkrecht (§. 92.).

Zus. 1. Stehen zwei Gerade auf einer Ebene senkrecht, so sind die Geraden parallel.

Wir nehmen an (Fig. 76.), AC und BD stehen auf der Ebene MN senkrecht.

Die Konstruktion und der Gang des Beweises, wie im Lehrsatz 1. 2.

3. $\wedge$ KCD = $\wedge$KCB = $\wedge$ KCA = R; daher steht KC durch einen Punkt auf drei Geraden senkrecht; also liegen diese Geraden CA, CB, CD in einer Ebene, oder CA und BD in einer Ebene, und da $\wedge$ACD = R = $\wedge$ BDC, so ist ACD + $\wedge$BDC = 2R; also AC ⧺ BD (§. 11.).

Zus. 2. Sind zwei Gerade einer dritten parallel, so sind sie selbst einander parallel (die drei Geraden nicht in einer Ebene angenommen); ist nemlich (Fig. 77.) AB ⧺ CD; EF ⧺ CD; so ist AB ⧺ EF. Legt man nemlich die Ebene MN so, daß CD auf ihr senkrecht steht, so steht auch AB und EF auf MN senkrecht (Lehrs.); daher AB ⧺ EF (Zus. 1.).

§. 94. Durch einen beliebigen Punkt gibt es eine Senkrechte auf einer Ebene, aber nur e i n e; der Punkt mag: 1) außer oder 2) in der Ebene liegen.

Bew. ad 1. (Fig. 78.) Sey A der Punkt außerhalb der Ebene MN. In der MN nehme man die beliebige Gerade CD; in der Ebenee ACD ziehe AE senkrecht auf CD; in MN ziehe EF senkrecht auf CD; in der Ebene AEF fälle AG senkrecht auf EF, so steht AG senkrecht auf MN; denn zieht man GL ⧺ CD, so hat man, da $\wedge$DEG = $\wedge$ DEA = R; DE senkrecht auf der Ebene AEG (§. 92.); folglich auch ihre Parallele LG

(§. 93.); daher $LGA = R$; aber $\angle AGE = R$ (constr.); daher AG senkrecht auf der Ebene MN (§. 92); wäre nun auch AE senkrecht auf MN so hätte man, wenn EG gezogen ist, $\angle AEG = R$; aber auch $\angle AGE = R$; also hätte man im $\triangle AEG$ zwei rechte Winkel, was unmöglich ist; es gibt also von einem Punkte außerhalb der Ebene auf dieser eine Senkrechte und zwar nur eine.

Bew. ad 2. Sey (Fig. 78.) der Punkt in der Ebene P; durch den beliebig außerhalb der Ebene angenommenen Punkt A sey die Senkrechte AG gezogen; man lege durch A, G, P, eine Ebene und ziehe in dieser $QP \parallel AG$, so ist QP senkrecht auf MN (§. 93.).

Wäre auch KP durch P auf der Ebene MN senkrecht, so lege man eine Ebene durch Q, P, K; diese schneidet die Ebene MN in PR; man hätte nun: $\angle KPR = R$; aber auch $\angle QPR = R$; mithin hätte man in einer Ebene auf PR durch einen Punkt zwei Senkrechte, was unmöglich ist; daher durch den in der Ebene MN liegenden Punkt P eine Senkrechte auf die Ebene, aber nur eine.

Zus. 1. Die Senkrechte von einem Punkte A außer einer Ebene auf diese ist die kürzeste Linie, die man von diesem Punkte zu einem Punkte der Ebene ziehen kann; denn zieht man die beliebige AE und EG, so ist, da $\angle AGE = R$; $AE > AG$; dieß gilt von jeder andern Geraden, die man von A auf die Ebene ziehen kann.

Zus. 2. Die Fußpunkte gleicher schiefer Linien, die alle von einem Punkte der Senkrechten ausgehen, sind vom Fußpunkte der Senkrechten gleich weit entfernt, und umgekehrt; ist nemlich (Fig. 78.) AG senkrecht auf MN, und $AC = AD$, so ist, wenn man CG, DG zieht, $\triangle CAG \cong \triangle DAG$ (IV.); also $CG = DG$ u. s. f.

Zus. 3. Wird eine Gerade von einer Ebene senkrecht halbirt, so ist jeder Punkt der Ebene von den Endpunkten der Geraden gleichweit entfernt (und umgekehrt); jeder Punkt außer der Ebene hat ungleiche Entfernungen von den Endpunkten der Ge-

raden. Der Beweis ergibt sich aus der Kongruenz rechtwinklicher Dreiecke, wie im Zus. 2.

§. 95. Lehrs. (Fig. 78.) Steht die Gerade AG auf der Ebene MN senkrecht, und man zieht vom Fußpunkte G dieser Senkrechten die Senkrechte GE auf die in der Ebene MN liegende Gerade CD, so ist, wenn man die Gerade AE zieht, AE senkrecht auf CD.

Bew. Wir machen EC = ED; ziehen CG, DG, so hat man $\triangle CEG \cong \triangle DEG$ (I.); daher;

$$CG = DG;$$

daraus hat man: $\triangle AGC \cong \triangle AGD$ (I.); also:

$$AD = AC;$$

daraus folgt: $\triangle AEC \cong \triangle AED$ (II.); mithin:

$$\wedge AEC = AED = R.$$

§. 96. Lehrs. (Fig. 79.) Steht AC auf der Ebene schief, AB aber senkrecht, und man zieht CB, so ist $\wedge$ ACB kleiner als jeder Winkel, den die AC mit einer durch ihren Fußpunkt C in der Ebene MN gezogenen Geraden macht; d. i.

$$\wedge ACB < \wedge ACE.$$

Bew. Es sey CK = CB; ziehe AK; so ist:
AC = AC; CB = CK (constr.); AB < AK (§.94 Zus. 1.); daher

$$\wedge ACB < ACK \text{ (§. 27. Zus.)}.$$

Zus. Aus diesem Grunde heißt der Winkel ACB der **Neigungswinkel** der Geraden AC gegen die Ebene MN; der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene ist also jener Winkel, den die Gerade mit ihrer Projektion auf der Ebene bildet.

§. 97. Erkl. Eine Gerade und eine Ebene sind **parallel**, wenn sie sich, bei jeder beliebigen Verlängerung und Erweiterung nicht schneiden.

Ebenso sind auch zwei Ebenen **parallel**, wenn sie sich bei jeder beliebigen Erweiterung nicht schneiden.

§. 98. Lehrs. Ist eine Gerade AB einer, in einer Ebene MN liegenden Geraden EF parallel, so ist sie der Ebene MN selbst parallel (Fig. 80.).

Bew. Man lege durch AB, EF eine Ebene, so ist EF der Durchschnitt der Ebenen EB, MN; schnitte nun AB die Ebene MN, so könnte dieß nur in der Ebene EB, also in der Geraden EF seyn; da aber EF ⫲ AB, so kann AB die EF, folglich auch die Ebene MN nicht schneiden.

Zus. 1. Steht AE auf der Ebene MN senkrecht und AB senkrecht auf AE, so ist AB der Ebene MN parallel; denn legt man durch BAE eine Ebene, so schneidet sie die Ebene MN in EF, und es ist (da ∧AEF = R = ∧BAE), AB ⫲ EF, folglich Lehrsatz.

Zus. 2. Ist AB der MN parallel, und man legt durch AB eine Ebene, welche die Ebene MN schneidet, so ist der Durchschnitt beider Ebenen immer der AB parallel.

B. Lage der Ebenen gegeneinander.

§. 99. Lehrs. Steht eine Gerade auf zwei Ebenen zugleich senkrecht, so sind diese parallel.

Bew. (Fig. 81.) Steht nemlich AB auf MN und PQ senkrecht, so ist: MN ⫲ PQ. Denn schnitten sich beide Ebenen in C, so hätte man, wenn man AC, BC zieht, das Dreieck ABC, in welchem ∧CAB = ∧CBA = R wäre, was unmöglich ist.

§. 100. Lehrs. Zwei Parallelebenen werden von einer dritten in Parallellinien geschnitten.

Bew. Ist (Fig. 82.) MN ⫲ PQ, und werden beide Ebenen von der Ebene RQ geschnitten in RN, BQ, so ist RN ⫲ BQ denn RN und BQ liegen in einer Ebene RQ und können sich nicht schneiden, weil sich sonst auch die Ebenen MN, PQ schneiden würden gegen unsere Annahme.

Zus. 1. Die zwischen Parallelebenen abgeschnittenen Parallellinien sind einander gleich, den ist (Fig. 82.) MN ⫲ PQ und RB ⫲ NQ, so ist, wenn wir durch RBNQ eine Ebene legen, welche die Parallelebenen in RN, BQ schneidet, die Figur BN ein Parallelogramm; daher RB = NQ. Daher sind auch alle Senkrechten zwischen Parallelebenen einander gleich.

Zus. 2. Steht eine Gerade auf einer von zwei Parallelebenen senkrecht, so steht sie auch auf der andern senkrecht. Denn

(Fig. 83.) ist MN ∥ PQ, und AB senkrecht auf MN, so lege man durch AB die Ebenen ABC, ABD; diese schneiden die beiden Ebenen MN, PQ beziehungsweise in BC, BD; AK, AL; nun ist ∧ ABC + ∧ BAK = 2R (Lehrs. u. §. 13. 1); da nun ∧ ABC = R; so ist auch ∧ BAK = R; ebenso BAL = R; also AB senkrecht auf der Ebene PQ (§. 92.).

Zus. 3. Sind also zwei Ebenen einer dritten parallel, so sind sie selbst parallel; denn errichtet man auf der dritten Ebene eine senkrechte Gerade, so steht diese auf den beiden andern Ebenen senkrecht (Zus. 2.); folglich sind diese parallel (§ 99.).

§. 101. Lehrs. Sind die Schenkel zweier Winkel beziehungsweise parallel, so sind die Ebenen dieser Winkel parallel, d. i. (Fig. 83.)

Dat. AL ∥ EF; AK ∥ EG

Thes. LAK (PQ) ∥ FEG (MN).

Bew. Vom Scheitel A fälle auf die Ebene FEG die Senkrechte AB; ziehe BD ∥ EF, BC ∥ EG, so ist BD ∥ AL, und BC ∥ AK (Dat. und constr. §. 93. Zus. 2.); daher LAB + ABD = 2R (§. 13.); und da ABD = R; (constr.), so ist auch LAB = R; eben so ist auch KAB = R; also steht AB auf der Ebene LAK oder PQ senkrecht (§. 92.); und da AB auch senkrecht auf der Ebene MN steht (constr.), so ist PQ ∥ MN (§. 99.).

Zus. Wir können zur Ebene MN (Fig. 83) durch einen außer ihr liegenden Punkt A eine Parallelebene legen; denn wir ziehen die beliebige AB, und die Geraden BD, BC in der Ebene MN; in der Ebene ABD nehmen wir AL ∥ BD; in der Ebene ABC die AK ∥ BC, so ist die durch LAK gelegte Ebene PQ der Ebene MN parallel; der Beweis liegt im Lehrsatze.

§. 102. Lehrs. Sind die Schenkel zweier Winkel nach einer Seite hingerichtet, und beziehungsweise parallel, so sind die Winkel gleich (Fig. 84).

Dat. AB ∥ ED; BC ∥ EF; Thes. ∧ ABC = ∧ DEF.

Bew. Mache BA = ED; BC = EF; ziehe AC, DF, ferner BE, AD, CF. Da AB ∥ DE, so ist AD ∥ BE; eben

so, wegen $BC \overset{=}{\#} EF$ ist $BE \overset{=}{\#} CF$; also auch: $AD \overset{=}{\#} CF$; daraus folgt: $AC = DF$; mithin

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (II.); also $\wedge ABC = DEF$.

Zus. 1. Durch einen Punkt B (Fig. 84) gibt es zu einer Ebene DEF nur eine Parallelebene ABC; denn wäre durch B auch die Ebene $BA'C' \# DEF$, so hätte man: $A'D = BE$ (§. 100. Zus. 1.); aber auch $AD = BE$, also wäre $A'D = AD$ und eben so $C'F = CF$, was unmöglich ist.

Zus. 2. Zieht man von beliebig vielen Punkten D, E, F.... einer Ebene die gleichen und unter sich parallelen Linien DA, EB, FC.... auf einer Seite der Ebene, so liegen die Endpunkte A, B, C.... dieser Geraden in einer Ebene, die der Ebene DEF parallel ist.

§. 103. (Fig. 85.) Erkl. Schneiden sich die beiden Ebenen MN, MP in der Geraden MA, so bilden sie den Flächenwinkel NAMQ, oder AM; errichtet man in beiden Ebenen durch einen beliebigen Punkt des Durchschnittes C die Senkrechten DC, BC auf MA, so heißt $\wedge$ DCB der Neigungswinkel der beiden Ebenen, welcher Neigungswinkel der Repräsentant des Flächenwinkels ist.

Zus. 1. Gleiche Flächenwinkel sind kongruent.

Zus. 2. Sind zwei Flächenwinkel einander gleich, so sind auch die entsprechenden Neigungswinkel einander gleich.

Zus. 3. Der Neigungswinkel ist immer der nemliche, durch welchen Punkt der Durchschnittslinie man auch die Senkrechten errichten mag. (§. 102.).

Zus. 4. Ist der Neigungswinkel zweier Ebenen ein rechter, so stehen die Ebenen aufeinander senkrecht, und umgekehrt.

Zus. 5. Die Durchschnittslinie MA steht auf der Ebene DCB des Neigungswinkels senkrecht. (§. 92.)

§. 104. Lehrs. Steht eine Gerade AB auf einer Ebene MN senkrecht, so steht jede durch AB gelegte Ebene KC auf MN senkrecht (Fig. 86.).

Bew. Man ziehe in MN die BL senkrecht auf BC durch B; BC ist der Durchschnitt beider Ebenen; BC steht auf BL, BA senkrecht; also $\wedge ABL = R$, der Neigungswinkel beider Ebenen.

Zus. 1. Steht die Ebene KC auf der Ebene MN senkrecht, so steht jede Gerade AB, die in der Ebene KC auf die Durchschnittslinie BC senkrecht gezogen wird, senkrecht auf der Ebene MN; denn zieht man in MN die Gerade BL senkrecht auf BC, so ist sowohl AB als LB senkrecht auf dem Durchschnitte; also ∧ ABL der Neigungswinkel der Ebenen, der ein rechter ist, da nach der Voraussetzung die Ebenen aufeinander senkrecht stehen. Da nun ABL = R = ABC, so steht AB auf der Ebene MN senkrecht (§. 92.).

Zus. 2. Steht die Ebene KC auf der Ebene MN senkrecht, so liegt jede Gerade, die man von einem Punkte A der Ebene KC senkrecht auf die Ebene MN zieht, ganz in der ersten Ebene; denn läge diese Senkrechte nicht in der Ebene KC, so könnte man von A eine Senkrechte auf den Durchschnitt BC beider Ebenen ziehen, die ganz in der Ebene KC liegt, und auf der Ebene MN senkrecht steht (Zus. 1.); wir hätten also durch einen Punkt A außer der Ebene MN zwei Senkrechte auf dieser, gegen §. 94. 1.

Zus. 3. Steht die Ebene KC senkrecht auf MN, und ist BC der Ebenen Durchschnitt, so liegt die Gerade, die man durch einen Punkt des Durchschnittes B senkrecht auf MN zieht, ganz in der Ebene KC; denn läge sie nicht in der Ebene KC, so könnte man in der Ebene KC auf den Durchschnitt durch B eine Senkrechte errichten; wir hätten dann durch einen Punkt B der Ebene MN zwei Senkrechte auf dieser gegen §. 94. 2.

Zus. 4. Stehen zwei Ebenen KC, PQ (Fig. 86.) auf einer dritten MN senkrecht, so steht der Durchschnitt AB der beiden ersten Ebenen senkrecht auf der dritten; denn zieht man von einem Punkte A des Durchschnittes eine Senkrechte auf MN, so liegt diese Senkrechte in beiden Ebenen (Zus. 2.); diese Linie ist aber ihr Durchschnitt.

§. 105. Lehrs. Werden zwei Parallelebenen MN, PQ von einer dritten RQ geschnitten, so sind die Neigungswinkel der beiden Ebenen gegen die dritte gleich (Fig. 82.).

Bew. Wir legen durch A eine Ebene CAE senkrecht auf die Gerade RN, so ist (da ∧ NAC = R = NAE;) CAE = ∧ RN; die Ebene CAE schneidet die Ebene PQ in KF; da nun BQ ++ RN (§. 100.), so steht QK auf der Ebene CAE senkrecht (§. 93.); also ∧ QKE = R = ∧ QKF; daher FKE = ∧ BQ; da aber CA ++ FK (§. 100), so ist ∧ CAK = FKE (§. 13. 2.), d. h. ∧ RN = ∧ BQ.

§. 106. Lehrs. Werden zwei Ebenen von einer dritten in Parallellinien unter gleichen Neigungswinkeln geschnitten, so sind diese Ebenen parallel (Fig. 82.).

Bew. Sey RN ++ BQ, und MRNQ = PBQS.

Man lege durch A auf die Gerade RN eine senkrechte Ebene CAE, so schneidet sie die BQ in K und es ist ∧ CAE = ∧ RN die Ebene CAE schneidet die Ebene PQ in KF, und da RN ++ QK (Dat.), so ist ∧ FKE = ∧ BQ; mithin ∧ CAE = ∧ FKE (Dat.); also CA ++ FK (§. 11. Zus.), folglich, da auch RN ++ BQ, MN ++ PQ (§. 101.)

§. 107. Lehrs. Nimmt man innerhalb des Flächenwinkels AM (Fig. 85) einen beliebigen Punkt K, und zieht von K auf die beiden Ebenen die Senkrechten KB, KD; so ist:

∧ DKB + ∧ MA = 2R.

Bew. Man lege durch BKD eine Ebene, so steht diese Ebene auf den Ebenen MN, MP (§. 104)., folglich auch auf dem Durchschnitte MA senkrecht (§. 104. Zus. 4.).

Nun hat man im Vierecke KDCB; ∧ KDC = R = KBC (Dat.); also ∧ DKB + ∧ DCB = 2B, d. i. ∧ DKB + ∧ MA = 2R.

Diese beiden Winkel heißen gegenseitig Supplementswinkel.

§. 108. Lehrs. (Fig. 87.) Halbirt eine Ebene AP den Flächenwinkel zweier Ebenen BN, AM, so ist jeder Punkt der Ebene AP von den Ebenen AM, BN gleichweit entfernt. Zieht man nemlich vom Punkte C der Ebene AP die Senkrechten CD, CE auf die Ebenen AM, BN, so ist CD = CE.

Bew. Wir legen durch DCE eine Ebene, so steht diese

auf den Ebenen AM, BN, folglich auf deren Durchschnitte AB senkrecht; sind nun DF, CF, EF die Durchschnitte der Ebenen AM, AP, BN mit DE, so ist $\wedge$ DFE der Neigungswinkel der Ebenen AM, BN; nun ist $\wedge$ DFC $=$ CFE (Dat.); $\wedge$ FDC $=$ R $=$ FEC; CF $=$ CF; daher $\triangle$ CFD $\cong$ $\triangle$ CFE (III.); also auch CD $=$ CE.

Zweiter Abschnitt.

Vom körperlichen Winkel und körperlichen Dreiecken.

§. 109. Wenn drei oder mehr Ebenen sich in einem Punkte schneiden, so bilden sie einen körperlichen Winkel oder eine körperliche Ecke. Der Punkt, in dem sie zusammenstoßen, heißt Spitze (Scheitel); der Durchschnitt je zweier Ebenen heißt Kante; die von den Kanten gebildeten ebenen Winkel, die ihren gemeinschaftlichen Scheitel in der Spitze haben, heißen Kantenwinkel (Seitenwinkel); die von je zwei zusammenstoßenden Ebenen gebildeten (Neigungs-) Winkel heißen Flächenwinkel. Der körperliche Winkel heißt drei-, vier-, vielseitig, je nachdem er von drei-, vier- oder mehr ebenen Winkeln gebildet wird.

Der dreiseitige körperliche Winkel heißt wohl auch körperliches Dreieck; ein körperliches Dreieck enthält drei Kanten- und drei Flächenwinkel.

§. 110. Lehrs. Zwei Kantenwinkel eines körperlichen Dreiecks sind zusammen genommen immer größer, als der dritte (Fig. 88.). Der Satz braucht nur für den Fall erwiesen zu werden, wenn ein Kantenwinkel größer, als jeder der beiden andern ist. Es sey also: $\wedge$ BAD $>$ $\wedge$ BAC; $\wedge$ BAD $>$ $\wedge$ CAD.

Thes. $\wedge$ BAC $+$ $\wedge$ CAD $>$ $\wedge$ BAD.

Bew. In der Ebene BAD machen wir $\wedge$ BAK $=$ $\wedge$ BAC, nehmen AG $=$ AL; durch die Punkte G, L, und einen willkührlich in der Kante AB angenommenen Punkt F legen wir eine Ebene so, daß sie die Kante AD schneidet in M; so erhalten wir die Durchschnitte dieser Ebene mit den Ebenen der Kantenwinkel GF, FM, GM.

Nun ist $\triangle FAG \cong \triangle FAL$ (I.); daher $FG = FL$.

Ferner hat man: $FM < FG + GM$ (§. 3.), oder:

$$
\begin{array}{lcl}
FL + LM & < & FG + GM; \text{ da nun} \\
FL & = & FG \quad ; \text{ so ist} \\
\hline
LM & < & GM;
\end{array}
$$

und da $AL = AG$ (constr.), und $AM = AM$; so ist $\wedge GAM > \wedge LAM$ (§. 27. Zus.), $\wedge FAG = \wedge FAL$ (constr.); daher $\wedge GAM + \wedge FAG > \wedge LAM + \wedge FAL$; oder $\wedge CAD + \wedge BAC > \wedge BAD$.

§. 111. Lehrs. Die Kantenwinkel eines körperlichen Winkels sind zusammen genommen $< 4R$ (Fig. 89.).

Bew. Es sey A die Spitze eines n seitigen körperlichen Winkels; legt man eine Ebene so, daß sie alle Ebenen der Kantenwinkel schneidet, so entsteht das n Eck BCLE; überdieß entstehen n Dreiecke: BAC, CAL ....

Man hat also:

$$x + x_1 + x_2 + \dots + q + q_1 + q_2 + q_3 \dots = 2nR \text{ (§. 20. 2.)},$$
$$m + m_1 + m_2 + m_3 \dots = 2nR - 4R \text{ (§. 20. 4.)},$$

oder: $m + m_1 + m_2 + m_3 \dots + 4R = 2nR$.

Nun ist: $\left.\begin{array}{l} q_1 + q_2 > m_1 \\ q_3 + q_4 > m_2 \end{array}\right\}$ §. 110. u. s. f.

also: $q + q_1 + q_2 + q_3 \dots > m + m_1 + m_2 + m_3 \dots$

$$
\begin{array}{lrcl}
\text{Da nun:} & x + x_1 + x_2 \dots + q + q_1 + q_2 \dots & = & m + m_1 + m_2 \dots + 4R, \\
& q + q_1 + q_2 & > & m + m_1 + m_2 \\
\hline
\text{so ist:} & x + x_1 + x_2 & < & 4R.
\end{array}
$$

§. 112. Lehrs. Nimmt man (Fig. 90.) innerhalb eines körperlichen Dreiecks ACBD einen Punkt O, und zieht von diesem Punkte Senkrechte auf die Ebenen der Kantenwinkel, so entsteht, wenn man durch je zwei dieser Senkrechten Ebenen legt, ein neues körperliches Dreieck mit der Spitze O, dessen Kantenwinkel die Supplemente der Flächenwinkel, und dessen Flächenwinkel die Supplemente der Kantenwinkel des ersten Dreiecks sind.

Bew. Es sey gegeben das körperliche Dreieck ACBD; O sey ein Punkt innerhalb des Dreiecks: OG, OF, OE seyen die Senkrechten von O beziehungsweise auf die Ebenen DBC, BCA,

ACD. Die durch OG, OF gelegte Ebene steht auf den Ebenen DCB, BCA, so wie auf dem Durchschnitte CB senkrecht (§. 104.); es ist also $FOG + DCBA = 2R$ (§. 107);
aus demselben Grunde ist $EOG + ACDB = 2R$, und
$EOF + DCAB = 2R$.

Da ferner CB senkrecht auf FOG und CD senkrecht auf EOG (Constr.), so ist $DCB + EOGF = 2R$;
eben so $DCA + FOEG = 2R$, und
$ACB + EOFG = 2R$.

Die beiden körperlichen Dreiecke ACBD, EOGF heißen deßwegen gegenseitig Supplementardreiecke.

Zus. Die Flächenwinkel eines körperlichen Dreiecks sind zusammen immer $> 2R$. Seyen die Flächenwinkel A, B, C; die den Flächenwinkeln gegenüber liegenden Kantenwinkel a, b, c. Nun konstruire man das Supplementardreieck, dessen Flächenwinkel beziehungsweise A', B', C', und Kantenwinkel a', b', c' seyn sollen. Nach dem Lehrsatze hat man:

$$A + a' = 2R,$$
$$B + b' = 2R,$$
$$C + c' = 2R,$$

daher: $A + B + C + a' + b' + c' = 6R$; aber
$a' + b' + c' < 4R$ (§. 111.); also:

$$A + B + C \qquad > 2R.$$

§. 113. Lehrs. Sind in zwei körperlichen Dreiecken die drei Kantenwinkel beziehungsweise gleich, so sind die gleichen Kantenwinkeln gegenüber liegenden Flächenwinkel einander gleich (Fig. 91.); d. i.

Dat. $\wedge ACD = \wedge acd$; $\wedge ACB = \wedge acb$;
$\wedge BCD = \wedge bcd$.

Thes. $\wedge CA = \wedge ca$; $\wedge CB = \wedge cb$; $\wedge CD = \wedge cd$.

Bew. Man nehme $CE = ce$; $CG = cg$; $CF = cf$, doch so, daß $CF > CE$, und $CF > CG$; lege durch EFG, efg Ebenen, so entstehen mehrere Dreiecke, und man hat: $\Delta ECG \cong \Delta ecg$ (I.); daher $EG = eg$; $\Delta ECF \cong \Delta ecf$ (I.); also $EF = ef$ und $\wedge CFE = \wedge cfe$; eben so folgt, daß $FG = fg$ und $CFG = cfg$; mithin $\Delta EFG \cong \Delta efg$; daher $\wedge EFG = \wedge efg$.

Man nehme FK = fk; ziehe KL, KM senkrecht auf CB; eben so kl, km senkrecht auf cb; ziehe LM, lm. Nun ist: $\triangle LKF \cong \triangle lkf$ (III); $\triangle MKF \cong \triangle mkf$ (III); daher LK = lk; MK = mk; LF = lf; MF = mf. Ferner ist: $\wedge LFM \cong \triangle lfm$ (I.); daher LM = lm; also $\triangle LKM \cong \triangle lkm$ (II); mithin $\wedge LKM = \wedge lkm$, oder $\wedge CB = \wedge cb$.

Auf ähnliche Weise läßt sich der Beweis für die übrigen Winkel führen.

Zus. 1. Sind die gleichen Kantenwinkel in beiden Dreiecken gleichförmig gelegt, so sind die Kanten- und Flächenwinkel der Ordnung nach gleich, also die Dreiecke kongruent; sind aber die gleichen Kantenwinkel nicht gleichförmig gelegt, so sind die einzelnen Seiten und Kantenwinkel einander gleich, die Dreiecke selbst aber nicht mehr kongruent; sie heißen dann symmetrisch. Verlängert man nemlich in einem körperlichen Dreiecke die Kanten durch die Spitzen, legt durch die verlängerten Kanten Ebenen, so ist das neue entstandene Dreieck dem gegebenen Dreiecke symmetrisch (man könnte es Scheiteldreieck nennen); nennen wir zwei Dreiecke A, B; die entsprechenden Scheiteldreiecke A′, B′, so ist, wenn A und B symmetrisch sind, $A \cong B'$ u. s. f.

Zus. 2. Sind in zwei körperlichen Dreiecken die drei Flächenwinkel beziehungsweise einzeln gleich, so sind auch die den gleichen Flächenwinkeln gegenüberliegenden Kantenwinkel einander gleich; heißen nemlich die Flächen- und Kantenwinkel des einen Dreiecks: A, B, C, a, b, c; die des andern: D, E, F, d, e, f, und es ist: A = D; B = E; C = F; so ist auch: a = d; b = e; c = f.

Denn man denke sich zum ersten Dreiecke das Supplementardreieck konstruirt, dessen entsprechende Flächen- und Kantenwinkel seyen A′, B′, C′, a′, b′, c′. Eben so sey zum zweiten Dreiecke das Supplementardreieck konstruirt, dessen Flächen- und Kantenwinkel D′, E′, F′, d′, e′, f′ heißen sollen; so hat man: $A + a' = 2R = D + d'$; da nun: A = D (Dat.), so ist

$a' = d'$. Eben so ist:

$b' = e'$ und

$c' = f'$.

Wir haben also in beiden Supplementardreiecken die Kantenwinkel einander gleich; daher nach Lehrsatz auch die Flächenwinkel; oder: $A' = D'$,
$B' = E'$,
$C' = F'$.

Nun ist aber (§. 112.) $A' + a = 2R = D' + d$; da nun $A' = D'$; so ist auch: $a = d$; eben so
$b = e$,
$c = f$; daher sind beide Dreiecke kongruent oder symmetrisch (Lehrs.).

§ 114. Lehrs. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Kantenwinkel gleich, so sind auch die diesen Kantenwinkeln gegenüberliegenden Flächenwinkel einander gleich; d. i. (Fig. 92.).

Dat. $\wedge ABC = \wedge DBC$; Thes. $\wedge BA = \wedge BD$.

Bew. Man halbire den Kantenwinkel ABD durch die Gerade BE, und lege durch CBE eine Ebene; so hat man: $\wedge ABC = \wedge DBC$ (Dat.); $\wedge ABE = \wedge DBE$ (constr.), $\wedge CBE = \wedge CBE$; daher in den körperlichen Dreiecken ABCE, DBCE drei Kantenwinkel einzeln einander gleich; daher (§. 113.), die den gleichen Kantenwinkeln gegegenüberliegenden Flächenwinkel gleich; daher $\wedge BA = \wedge BD$.

Zus. 1. Sind in einem körperlichen Dreiecke alle Kantenwinkel einander gleich, so sind auch alle Flächenwinkel einander gleich.

Zus. 2. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Flächenwinkel einander gleich, so sind auch die den gleichen Flächenwinkeln gegenüberliegenden Kantenwinkel einander gleich. Dieß wird durch Hülfe der Supplementardreiecke (wie §. 113. Zus. 2.) und nach dem Lehrsatze bewiesen.

Zus. 3. Sind in einem körperlichen Dreiecke alle Flächenwinkel gleich, so sind auch alle Kantenwinkel gleich.

§. 115. Lehrs. Sind in zwei körperlichen Dreiecken zwei Kantenwinkel nebst dem zwischenliegenden Flächenwinkel beziehungsweise gleich, so sind auch die beiden dritten Kantenwinkel

(nebst den diesem Kantenwinkel anliegenden Flächenwinkeln) gleich (Fig. 91.).

Dat. ∧ACB = ∧acb; ∧BCD = ∧bcd; ∧CB = ∧cb.

Thes. ∧ACD = ∧acd.

Bew. Wir construiren wie in §. 113; dann haben wir:

△CFE ≌ △cfe (I.)

△CFG ≌ △cfg (I.)

△KLF ≌ △klf (III)

△MKF ≌ △mkf (III)

△MKL ≌ △mkl (I)

△MLF ≌ △mlf (II)

△GFE ≌ △gfe (I)

△CEG ≌ △ceg (II); daher ∧ACD = ∧acd.

Zus. Sind in zwei körperlichen Dreiecken ein Kantenwinkel nebst den beiden anliegenden Flächenwinkeln beziehungsweise gleich, so sind die beiden andern Kantenwinkel nebst dem zwischenliegenden Flächenwinkel gleich; daher die Dreiecke kongruent oder symmetrisch.

Dieser Fall wird durch Supplementardreiecke auf den Lehrsatz zurückgeführt.

§. 116. Lehrs. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Kantenwinkel ungleich, so sind auch die diesen Kantenwinkeln gegenüberliegenden Flächenwinkel ungleich; d. h. dem größern Kantenwinkel liegt der größere Flächenwinkel gegenüber (Fig. 93.).

Dat. ∧CBD > ∧ABC; Thes. ∧BA > ∧BD.

Bew. Vom beliebigen Punkte O der Kante BC errichte man auf die Ebene ABD die Senkrechte OK; ziehe KL senkrecht auf BD; KM senkrecht auf BA; ziehe OL, OM; so steht OL senkrecht auf BD; OM senkrecht auf BA (§. 95.); daher: ∧OLK = ∧BD; ∧OMK = ∧BA. Es ist nun zu zeigen, daß ∧OMK > ∧OLK ist.

Wir nehmen nun BR = BL und ziehen die Gerade OR; so ist BL = BR (constr.); BO = BO; ∧RBO < ∧OBL (Dat.); daher RO < OL (§. 27.); RO > OM (§. 31. Zus. 2.); also OL > OM; mithin $OL^2 > OM^2$; nun ist:

$$\left.\begin{array}{l} OL^2 = OK^2 + KL^2 \\ OM^2 = OK^2 + KM^2 \end{array}\right\} \text{(§ 58. Zus. 2.)}$$

daher:
$$\begin{array}{rl} & OK^2 + KL^2 > OK^2 + KM^2 \\ & OK^2 \quad = OK^2 \\ & - \qquad - \\ \hline & KL^2 \quad > KM^2; \text{ oder } KL > KM. \end{array}$$

Es sey nun KP = KM; ziehe OP, so ist:

$\triangle OKP \cong \triangle OKM$ (I.); also:

$\wedge OMK = \wedge OPK$; $OPK > \wedge OLK$; also:

$\wedge OMK > \wedge OLK$.

Zus. Sind in einem körperlichen Dreiecke zwei Flächenwinkel ungleich, so sind auch die diesen Flächenwinkeln gegenüberliegenden Kantenwinkel ungleich; d. h. dem größern Flächenwinkel liegt der größere Kantenwinkel gegenüber. Dieser Fall wird durch Hülfe des Supplementardreiecks auf den Lehrsatz zurückgeführt.

Dritter Abschnitt.

Von Körpern überhaupt; reguläre Körper; Gleichheit und Verhältniß der Prismen und der Pyramiden.

§. 117. Erkl. Ein von allen Seiten begrenzter Raum heißt Körper (Vergl. §. 1.). Sind die Grenzen eines Körpers lauter Ebenen, so heißt der Körper Polyeder, außerdem krummer Körper. Die Geraden, in welchen zwei Begrenzungsebenen eines Polyeders sich schneiden, heißen Kanten; der Punkt, in welchem drei oder mehrere Begrenzungsebenen sich schneiden, heißt Ecke (Scheitel).

Zus. Ein Polyeder muß wenigstens vier Begrenzungsflächen haben.

§. 118. Erkl. Ein Polyeder heißt regulär, wenn die Begrenzungsebenen lauter reguläre kongruente Figuren sind, und die von diesen Figuren gebildeten Körperwinkel kongruent sind.

Zus. Es gibt nur fünf reguläre Polyeder. Da nemlich die begrenzenden Ebenen lauter reguläre kongruente Figuren seyn müssen, so können diese Figuren seyn:

A. Reguläre kongruente Dreiecke.

Da nun der Winkel eines regulären Dreiecks 60° enthält (§. 79.), und die ebenen Winkel, welche einen körperlichen Winkel bilden, immer kleiner als vier Rechte sind (§. 111.), so können 1) je drei solche Dreieckswinkel (= 180°) einen Körperwinkel bilden; dadurch erhält man das Tetraeder; oder 2) je vier (= 240°); dieß gibt das Oktaeder; oder 3) je fünf (= 300°); wodurch man das Ikosaeder erhält. Sechs solcher Dreieckswinkel enthalten schon 360°; sieben aber noch mehr u. s. f. Daher in diesem Falle kein körperlicher Winkel, also auch kein Körper, von regulären Dreiecken begrenzt, möglich.

B. Reguläre kongruente Vierecke (gleiche Quadrate).

Der Winkel eines Quadrats enthält 90°; drei solche Winkel geben 270°; also ist ein körperlicher Winkel und ein Körper möglich; er heißt Hexaeder (Würfel, Kubus). Vier solche Winkel geben schon 360° u. s. f.; daher kein anderer, von Quadraten begrenzter, Körper mehr möglich.

C. Reguläre kongruente Fünfecke.

Der Winkel eines solchen Fünfecks enthält 108°; drei solcher Winkel (= 324°) geben einen körperlichen Winkel; daher in diesem Falle ein Körper möglich; er heißt Dodekaeder. Vier oder mehr Fünfeckswinkel geben schon mehr als 360°.

Des regulären Sechseckes Winkel enthält 120°; drei solcher Winkel geben also schon 360°; daher ist kein regulärer Körper von Sechsecken, noch weniger von Siebenecken ... begrenzt, möglich.

Anmerk. Netze der Körper überhaupt, besonders der regulären Körper.

§. 119. *Erkl.* (Fig. 94.) Zieht man von den Ecken einer Figur ABCDE nach einer Seite hin gleiche, einander parallele Linien, und legt durch die Endpunkte F, G, K, L, M eine Ebene (§. 102. Zus. 3.), ebenso durch je zwei benachbarte Parallelen, AF und BG, BG und CK.... Ebenen, so begrenzen diese Ebenen ein Polyeder, welches *Prisma* heißt.

Die Figuren ABCDE, FGKLM heißen *Grundflächen*; die übrigen Figuren AG, BK.... *Seitenflächen*; die Durchschnitte zweier Seitenflächen heißen *Seitenkanten*; der Durchschnitt einer Seitenfläche und einer Grundfläche heißt *Grundkante*.

Je nachdem die Grundfläche drei, vier.... Seiten hat, heißt das Prisma drei=, vierseitig....

Steht eine Seitenkante (also alle Seitenkanten §. 93.) auf der Grundfläche senkrecht, so heißt das Prisma ein *gerades* oder *senkrechtes*; außerdem schief.

§. 120. *Lehrs.* Im Prisma sind die Seitenflächen Parallelogramme; die Grundflächen aber sind kongruent und parallel.

Bew. Nach §. 119. ist (Fig. 94.) AF $\overset{=}{\#}$ BG; also AG ein Parallelogramm (§. 32. Zus. 3.); eben so sind BK, CL.... Parallelogramme.

Daraus folgt ferner: FG $\overset{=}{\#}$ AB; BC $\overset{=}{\#}$ GK....; also auch $\triangle$ MFG = $\triangle$ EAB; $\triangle$ FGK = $\triangle$ ABC.... mithin in beiden Grundflächen alle Seiten und Winkel der Ordnung nach gleich; daher sind sie kongruent; daß sie parallel sind, folgt aus §. 102. Zus. 3.

Zus. 1. Ein Prisma ist also jenes Polyeder, das von zwei kongruenten parallelen Grundflächen, und so vielen Parallelogrammen (als Seitenflächen) begrenzt wird, als die Grundfläche Seiten hat.

Zus. 2. Eine Senkrechte von einem Punkte einer Grundfläche auf die andere Grundfläche heißt *Höhe des Prisma*; im senkrechten Prisma ist eine Seitenkante zugleich die Höhe (§. 100. Zus. 1.).

§ 121. Lehrs. Zwei Prismen sind kongruent, wenn sie die Grundflächen und ein Paar gleichliegende Seitenflächen kongruent haben, und der Neigungswinkel der kongruenten Seitenflächen gegen die Grundflächen in beiden Prismen gleich ist.

Sind nemlich (Fig. 94.) in beiden Prismen:

$$ABCDE \cong abcde; \; AEMF \cong aemf;$$

$$\wedge AE = \wedge ae; \text{ so ist: Pr. } AB \ldots LM \cong ab \ldots lm.$$

Bew. Wir legen die Grundfläche ab .... e so auf die Grundfläche AB .... E, daß sie sich decken (Dat.); es fällt also ae auf AE, (ed auf ED)....; da AE und ae zusammenfallen, so muß, da $\wedge AE = \wedge ae$, auch am auf AM und da am $\cong$ AM, so muß em auf EM, af auf AF, fm auf FM fallen.

Da die Punkte m, e, d beziehungsweise mit den Punkten M, E, D zusammenfallen, so fällt Ebene el auf Ebene EL, und die beiden Parallelogramme el und EL decken sich (§. 35.); aus demselben Grunde decken sich die Parallelogramme dk, DK; cg, CG ....

Mithin fallen alle Grenzen der Prismen zusammen; daher die Prismen kongruent.

Zus. Sind unter den im Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen die entsprechenden Flächen nicht gleichförmig gelegt, so sind die Prismen nicht kongruent, sondern symmetrisch. Zieht man nemlich von den Ecken einer Grundfläche senkrechte Linien auf die Ebene der andern Grundfläche, und verlängert diese Senkrechten so, daß sie alle von dieser Grundfläche halbirt werden, so erhält man, wenn man die gehörigen Ebenen legt, ein neues Prisma, welches alle Seitenflächen, Neigungswinkel.... mit dem ersten Prisma gleich hat; die beiden Prismen sind dann symmetrisch, und nur senkrechte Prismen in diesem Falle kongruent.

§ 122. Erkl. Sind in einem Prisma die Grundflächen Parallelogramme, so sind (§. 120.) alle Begrenzungsfiguren des Prisma Parallelogramme; deßwegen heißt dieses Prisma ein Parallelepiped; und dieses heißt rechtwinklich, wenn alle Parallelogramme Rechtecke sind.

Zus. Das Hexaeder ist ein rechtwinkliches Parallelepiped.

§. 123. Lehrs. Im Parallelepiped sind die gegenüberstehenden Seitenflächen kongruent und parallel.

Bew. (Fig. 95.) In den gegenüberstehenden Seitenflächen AF, BK hat man AE $\overset{=}{\parallel}$ BG (§. 119.); eben so ist: AD $\overset{=}{\parallel}$ BC; eben so auch: $\wedge$DAE $=$ $\wedge$CBG (§. 102.); daher beide Parallelogramme kongruent (§. 35.); da aber AB $\overset{=}{\parallel}$ DC $\overset{=}{\parallel}$ FK $\overset{=}{\parallel}$ EG, so ist ED $\parallel$ GC (§. 102. Zus. 3.).

Zus. Im Parallelepipend kann man zwei beliebige gegenüberstehende Flächen als Grundflächen betrachten.

§. 124. Lehrs. Legt man durch zwei gegenüberliegende Kanten eines Parallelepipeds eine Ebene, so theilt diese das Parallelepiped in zwei symmetrische dreiseitige Prismen.

Bew. (Fig. 95.) Legt man durch GB, FD eine Ebene, so schneidet diese die EK, AC in den Geraden und Parallelen GF, BD (§. 100.); daher die Figur GD ein Parallelogramm; da EF $\overset{=}{\parallel}$ AD; EG $\overset{=}{\parallel}$ AB, so ist $\wedge$ DAB $=$ $\wedge$ FEG; also $\triangle$ ABD $\cong$ $\triangle$ EGF $\cong$ $\triangle$ GFK $\cong$ $\triangle$BDC. Daher beide Polyeder dreiseitige Prismen, deren Grundflächen die ebengenannten kongruenten Dreiecke sind.

Wir legen nun eine Ebene senkrecht durch die Kante AD, im Punkte N, so steht sie auch senkrecht auf den Kanten BC, EF, GK (§. 93); diese Ebene schneidet die Flächen des Parallelepipeds in den Geraden NL, LM, MP, PN; da LN $\parallel$ MP; LM $\parallel$ NP (§. 100.), so ist MN ein Parallelogramm, daher

$\wedge$LMP $=$ $\wedge$LNP (§. 21. Zus. 1.); da aber

$$\left.\begin{array}{l}\wedge DNL = R = \wedge DNP \\ \wedge KML = R = \wedge KMP\end{array}\right\}\text{ constr.}$$

so ist $\wedge$LNP $=$ $\wedge$ DA; $\wedge$ LMP $=$ $\wedge$ GK; daher $\wedge$AD $=$ $\wedge$GK und da überdieß $\triangle$ GKF $\cong$ $\triangle$BAD, KB $\cong$ AF (§. 123); so ist: Prisma ABDEGF symmetrisch Prisma GKFCBD (§. 121. Zus.)

Zus. Im Parallelepiped sind die gegenüberliegenden Neigungswinkel einander gleich.

§. 125. Lehrs. Zwei Parallelepipeden sind gleich, wenn sie bei kongruenten Grundflächen gleiche Höhen haben.

Bew. Legt man die kongruenten Grundflächen so zusam-

men, daß sie sich decken, so müssen die beiden andern Grundflächen in eine Ebene fallen.

Nun können aber a) noch ein Paar Seitenflächen zusammenfallen, oder b) nicht zusammen fallen.

ad a. In diesem Falle können die beiden Parallelepipeden wieder drei Lagen haben, je nachdem die, den sich deckenden Grundflächen gegenüberliegenden Flächen, 1) mehrere, 2) eine, 3) keine gerade Linie gemeinschaftlich haben.

ad 1. (Fig. 96.) Die Seitenflächen ED, KD fallen in eine Ebene. Zu zeigen ist, daß

Parallelepid. ABCDEFHG = Parallelepid. ABCDKLMN.

Man hat BC = FH = LM (§. 32 Zus.)

LH = LH; daher durch Subtraktion:

FL = HM, eben so: FB = HC; LB = MC (§. 32. Zus.); daher $\triangle$ FLB $\cong$ $\triangle$ HMC $\cong$ $\triangle$ GND $\cong$ $\triangle$ EKA; mithin haben die beiden dreiseitigen Prismen AEKBFL, DGNCHM kongruente Grundflächen; und da überdieß:

FA $\cong$ HD (§. 123.); $\wedge$ LFBA = $\wedge$ MHCD (§. 105.); so ist:

Pr. AEKBFL = Pr. DGNCHM (§. 121.);

Pr. AKGDCHLB = Pr. AKGDCHLB;

addirt man nun beiderseits, so erhält man:

Parallepid. ABCDEFHG = Parallepid. ABCDKLMN.

ad 2. Dieser Fall ist klar aus §. 124.

ad 3. (Fig. 97.) Man hat: BD = FH = KL, HK = HK; also durch Addition: FK = HL; FB = HD; KB = LD; mithin $\triangle$BFK $\cong$ $\triangle$HDL (II.); da überdieß (wie ad 1.) AF $\cong$ CH; $\wedge$ HFBA = $\wedge$ KHDC, so ist

Pr. AEMBFK = Pr. CGNDHL (§. 121.).... (1

Die Ebene AK schneidet die Parallelebenen AF, CH in den Geraden AB, PO, daher, weil AP $\parallel$ BO, PO $\overset{=}{\parallel}$ AB $\overset{=}{\parallel}$ CD $\overset{=}{\parallel}$ GH $\overset{=}{\parallel}$ MK, hat man das dreiseitige Prisma OKHPMG.... (2 und das dreiseitige Prisma OBDFCA.... (3.

Subtrahirt man nun Prisma (2 auf beiden Seiten von

der Gleichung (1, und addirt zur erhaltenen Differenz beiderseits Prisma (2, so erhält man:

Parallepid. ABCDEFHG = Parallepid. ABCDMKLN.

ad b. (Fig. 98) In diesem Falle decken sich ein Paar Grundflächen ABCD der beiden Parallelepipeden; die andern Grundflächen EFGH, LMNK fallen in eine Ebene (Dat.); außer diesen fallen keine Seitenflächen der Parallelepipeden in eine Ebene; es sind auch hier, wie ad a, verschiedene Lagen möglich; doch wird der Beweis aus einem hier aufzuführenden, in der Figur schon angedeuteten Falle leicht für alle übrigen Fälle abzuleiten seyn.

Zu zeigen ist nemlich:

Parallepid. ABCDEFGH = Parallepid. ABCDLMNK.

Bew. Wir reduziren diesen Fall auf den Fall ad a, indem wir ein Parallelepiped konstruiren, von welchem zwei Seitenflächen beziehungsweise mit einer Seitenfläche des einen, und einer Seitenfläche des andern gegebenen Parallelepipedes zusammen fallen.

Wir verlängern die Geraden FG, EH; KL, NM, so schneiden sich diese beziehungsweise in den Punkten O, P, R, Q, und da KO ++ NR ++ AB ++ CD ++ GH; eben so FR ++ EQ ++ LM ++ BC....; so ist

$$\mathrm{RQ} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{OP} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{FE} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{BA} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{CD};$$

$$\mathrm{OR} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{PQ} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{LM} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{BC} \overset{=}{+\!\!+} \mathrm{AD};$$

daher ABCD $\cong$ OPRQ; zieht man also BO, AP, CR, DQ, und legt die gehörigen Ebenen, so ist ABCDPORQ ein Parallelepiped, das mit den gegebenen Parallelepipeden gleiche Grundfläche und Höhe hat.

Nun liegen AH und AQ in einer Ebene; daher

Parallepid. ABCDEFGH = Parallepid. ABCDPORQ (ad a 3.)

Es liegen aber BK, BP auch in einer Ebene, daher

Parallepid. ABCDPORQ = Parallepid. ABCDLMNK (ad a 3.);

daher auch:

Parallepid. ABCDEFGH = Parallepid. ABCDLMNK.

Zus. Theilt man die bisher als gleich erwiesenen Parallelepipeden in symmetrische dreiseitige Prismen, so sind diese Prismen auch einander gleich, als die Hälften von gleichen Ganzen; d. h. zwei dreiseitige Prismen sind gleich, wenn sie bei kongruenten Grundflächen gleiche Höhe haben.

§. 126. Lehrs. Zwei Parallelepipeden sind gleich, wenn sie gleiche Grundfläche bei gleicher Höhe haben.

Bew. (Fig. 99) Die gleichen Grundflächen seyen ABCD, APDR; so ist, wenn EH, KN in eine Ebene fallen,

Parallepid. ABCDEFGH = Parallepid. APRDKMNL.

Wir legen durch FAP HDR Ebenen, welche die Ebene EN in FO, HQ; die Ebene EC in OP, QR schneiden, so sind die kongruenten Parallelogramme AO, DQ parallel (§. 102. Zus. 1.) dadurch entsteht eine Parallelepiped APRDFOQH.

Nun hat man: $EF \overset{=}{\#} BA \overset{=}{\#} CD \overset{=}{\#} GH$;

$FO \overset{=}{\#} AP \overset{=}{\#} DR \overset{=}{\#} HQ$;

und da aus diesem Grunde (§. 102.)

$\wedge EFO = \wedge BAP = \wedge CDR = \wedge GHQ$; so ist

$\triangle EFO \cong \triangle BAP \cong \triangle CDR \cong GHQ$ (I.).

Mithin hat man die dreiseitigen Prismen: ABPFEO, CDRGHQ mit kongruenten Grundflächen; da überdieß $EA \cong GD$; $\wedge OEBA = \wedge QGCD$ (§. 105.); so ist:

Pr. BAPEFO = Pr. CDRGHQ; aber auch

Pr. PACDFHGO = Pr. APCDFHGO;

daher beiderseits addirt, erhält man:

Parallepid. ABCDFEGH = Parallepid. APRDFOQH;

nun ist Parallepid. APRDFOQH = Parallepid. APRDKMNL (§. 125. a.); also

Parallepid. ABCDFEGH = Parallepid. APRDKMNL

Anmerk. Die Lage der beiden Parallelepipeden kann wieder, wie im §. 125., mannigfaltig seyn; doch läßt sich für jede andere Lage der Beweis in ähnlicher Weise auf §. 125. zurückführen.

Zus. 1. Zerlegt man beide Parallelepipeden in symmetrische dreiseitige Prismen, so ist jedes Prisma die Hälfte des entsprechenden Parallelepipedes; daher auch die Prismen einander gleich; also sind dreiseitige Prismen einander gleich, wenn sie bei gleicher Grundfläche gleiche Höhe haben.

Zus. 2. Haben zwei beliebige vielseitige Prismen gleiche Grundfläche und Höhe, so sind sie gleich; denn zerlegt man die gleichen Grundflächen in gleiche Dreiecke, so wird jedes vielseitige Prisma in dreiseitige Prismen abgetheilt; da nun die dreiseitigen Prismen (Zus. 1.) einander gleich sind, so sind auch ihre Summen, also die vielseitigen Prismen gleich.

Zus. 3. Nach Zus. 2. sind also auch mehrere Prismen einem Prisma gleich, wenn die Prismen gleiche Höhe haben, die Grundfläche des zweiten Prisma aber gleich ist den Grundflächen der ersten Prismen zusammengenommen.

§. 127. Lehrs. Legt man durch einen beliebigen Punkt der Kante eines Prisma eine Ebene parallel zur Grundfläche, so ist die dadurch entstehende Durchschnittsfigur der Grundfläche kongruent (Fig. 94.). Sey durch N der Kante FA eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt, so ist: NOPOR $\cong$ ABCDE.

Bew. Da NA $\#$ RE (§. 119.); NR $\#$ AE (§. 100.); so ist NR = AE (§. 32. Zus. 1.); eben so wird gezeigt, daß

$$NO = AB;\ OP = BC \ldots$$

sey; daher in beiden Figuren alle Seiten der Ordnung nach gleich; da

NR $\#$ AE, NO $\#$ AB; so ist $\wedge$ EAB = $\wedge$ RNO (§. 102); eben so ist: $\wedge$ ABC = $\wedge$ NOP ....
daher in beiden Figuren alle Winkel der Ordnung nach gleich, mithin die Figuren kongruent.

Zus. Durch Ebenen, den Grundflächen parallel, wird jedes Prisma wieder in Prismen getheilt.

§. 128. Lehrs. Zwei Prismen verhalten sich bei gleicher Grundfläche wie ihre Höhen.

Bew. Es sey das eine Prisma P, das andere Prisma P'; die entsprechenden Höhen seyen h, h'; wir nehmen nun eine

Gerade, die in h und h′ genau enthalten ist; und zwar sey sie in h mmal, in h′ nmal enthalten; legen wir nun in beiden Prismen durch die Theilungspunkte Ebenen, der Grundfläche parallel, so erhalten wir dadurch lauter gleiche Prismen (§. 126. Zus. 2.); heiße ein solches Prisma p; so hat man:

$P = m . p$

$P' = n . p$; daher

$P : P' = m . p : n . p = m : n$; da aber auch: $h : h' = m : n$; so hat man $P : P' = h : h'$.

§. 129. Lehrs. Zwei Prismen verhalten sich bei gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen.

Bew. Seyen die beiden Prismen P, P′; die entsprechenden Grundflächen g, g′; nun nehme man eine beliebige Figur k, die in beiden Grundflächen genau enthalten sey, und zwar sey sie in g mmal, in g′ nmal enthalten; so hat man:

$$g = km$$
$$g' = kn;$$

construirt man nun über der Grundfläche k ein Prisma, das mit den gegebenen Prismen gleiche Höhe hat, so enthält das Prisma P m solche Prismen; das Prisma P′ aber n solche Prismen; oder man hat:

$P = mp$

$P' = np$; man hat also:

$P : P' = mp : np = m : n$

$g : g' = km : kn = m : n$; also

$P : P' = g : g'$.

§. 130. Lehrs. Zwei Prismen verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen.

Bew. Es sey ein Prisma P mit der Grundfläche G und Höhe H; es sey ein zweites Prisma p mit der Grundfläche g und Höhe h; nun sey ein drittes Prisma p′ construirt, das die Grundfläche G und die Höhe h hat, so hat man:

$P : p' = H \quad : h$ (§. 128.)

$p' : p = G \quad : g$ (§. 129.); daher

$P : p = GH : gh$ (Arithm.).

§. 131. Erkl. Nimmt man außer der Ebene einer Figur ABDEF (Fig. 100) einen Punkt C, und zieht von allen Ecken der Figur A, B, D.... Gerade zum Punkte C, und legt Ebenen durch ABC; durch AFC...., so wird durch die so gelegten Ebenen und die gegebene Figur ein Polyeder begrenzt, welches Pyramide heißt; der Punkt C heißt die Spitze; die Figur ABDEF die Grundfläche; Seitenkanten, Grundkanten. Eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche heißt Höhe der Pyramide. Die Pyramide heißt drei- vierseitig.... je nachdem die Grundfläche drei, vier.... Seiten hat.

Zus. Die Seitenflächen der Pyramiden sind Dreiecke; daher eine Pyramide jener Körper, der von einer beliebigen Grundfläche, und so vielen Dreiecken (als Seitenflächen) begrenzt wird, als die Grundfläche Seiten hat.

Anmerk. Das Tetraëder ist eine dreiseitige Pyramide.

§. 132. Lehrs. Haben zwei Pyramiden kongruente Grundflächen, überdieß ein Paar kongruente gleichliegende Seitenflächen, nebst gleichen Neigungen dieser Seitenflächen gegen die Grundfläche, so sind die Pyramiden kongruent.

Bew. Legt man die kongruenten Grundflächen auf einander, daß sie sich decken, so müssen auch die beiden kongruenten Seitenflächen, wegen gleicher Neigungswinkel, sich decken; aber auch alle übrigen Seitenflächen müssen sich decken (nach dem ersten Kongruenzfall der Dreiecke); daher die Pyramiden kongruent (vergl §. 121.).

Zus. Sind unter den in dem Lehrsatze ausgesprochenen Bedingungen die entsprechenden Flächen nicht gleichförmig gelegt, so sind die Pyramiden nicht kongruent, sondern symmetrisch. Zieht man nemlich eine Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche, und verlängert sie so weit, daß die Grundfläche sie halbire, und verbindet die Ecken der Grundfläche mit dem andern Endpunkte dieser Senkrechten durch Gerade, so erhält man, wenn man die erforderlichen Ebenen legt, eine neue Pyramide, die der ersten symmetrisch ist; daher unter den im Lehrsatze ausgesprochenen

Bedingungen die eine Pyramide entweder der andern Pyramide, oder der symmetrischen Pyramide kongruent.

§. 133. Lehrs. Legt man in einer Pyramide eine Ebene, der Grundfläche parallel, so ist die Durchschnittsfigur der Ebene mit der Oberfläche der Pyramide der Grundfläche ähnlich, und beide Figuren verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Entfernungen von der Spitze.

Bew. Es sey (Fig. 100.) die Ebene $abdef \parallel ABDEF$, so haben diese beiden Figuren gleich viele Seiten. Nun ist: $AB \parallel ab$; $AF \parallel af$ (§. 100.); daher:

$\angle FAB = \angle fab$ (§. 102.); eben so ist:

$\angle ABD = \angle abd$

$\angle BDE = \angle bde \ldots$

daher in beiden Figuren alle Winkel der Ordnung nach gleich. Ferner hat man im $\triangle CAB$, CAF ($AB \parallel ab$, und $AF \parallel af$):

$CA : AB = Ca : ab$

$CA : AF = Ca : af$; daher

$AB : AF = ab : af$; eben so hat man:

$AF : FE = af : fe \ldots$

daher in beiden Figuren alle Seiten der Ordnung nach proportionirt; mithin die Figuren ähnlich.

Wir ziehen nun die CK senkrecht auf die Grundfläche ABDEF, so schneidet sie auch die Ebene abdef in O, und steht auf ihr senkrecht (§. 100. Zus. 2.).

Wir legen nun durch CAK eine Ebene, so schneidet sie die eine Grundfläche in AK, die andere in aO, und $AK \parallel aO$ (§. 100.).

In den Dreiecken CAF, CAK hat man nun:

$CA : AF = Ca : af$

$CA : CK = Ca : CO$; daher

$AF : CK = af : CO$; oder

$AF^2 : CK^2 = af^2 : CO^2$ (Arithm.); oder

$AF^2 : af^2 = CK^2 : CO^2$;

da aber $ABDEF \sim abdef$; so ist (§. 57. Zus. 2.):

$ABDEF : abdef = AF^2 : af^2$; also

$ABDEF : abdef = CK^2 : CO^2$.

Zus. Durch die zur Grundfläche parallel gelegte Ebene wird die Pyramide in zwei Theile getheilt; der eine Theil ist wieder eine Pyramide; der andere Theil aber ist eine abgekürzte Pyramide.

In der abgekürzten Pyramide heißt die Senkrechte von der einen Grundfläche auf die andere die Höhe. Die Seitenflächen der abgekürzten Pyramide sind Trapezen.

§. 134. Lehrs. Haben zwei Pyramiden gleiche Grundflächen und gleiche Höhen, so sind in diesen alle Durchschnittsfiguren gleich, die durch die zur Grundfläche in gleicher Entfernung von der Spitze (oder der Grundfläche) parallel gelegten Ebenen gebildet werden (Fig. 101.).

Wenn also Grundfläche ABD = Grundfläche abd; Höhe CK = Höhe ck; CO = co, und GLR ♯ ABD, glr ♯ abd; so hat man:

$$GLR = glr.$$

Bew. $ABD : GLR = CK^2 : CO^2$ (§ 133.)

$$abd : glr = ck^2 : co^2;$$

da nun $CK^2 = ck^2$; $CO^2 = co^2$ (Dat.); so folgt:

$$ABD : abd = GLR : glr;$$

da nun ABD = abd (Dat.), so ist: GLR = glr (Arithm.).

§. 135. Lehrs. Zwei Pyramiden sind gleich, wenn sie bei gleichen Grundflächen gleiche Höhe haben.

Bew. (Fig. 101.) Es sey ABD = abd; die Höhe CK = ck.

Wir theilen nun CK = ck in gleiche Theile, und legen durch die Theilungspunkte Ebenen, der Grundfläche parallel, so erhalten wir in beiden Pyramiden gleich viele abgekürzte Pyramiden, deren Grundflächen beziehungsweise einander gleich sind, und die auch gleiche Höhen haben; wir konstruiren nun über den Grundflächen ABD, MEF .... Prismen, welche mit den abgekürzten Pyramiden gleiche Höhe haben; eben so konstruiren wir in der andern Pyramide über den Grundflächen emf, glr .... Prismen (abwärts), die mit den abgekürzten Pyramiden gleiche Höhe haben. In beiden Pyramiden haben alle Prismen gleiche Höhe; bezeichnen wir nun durch: P, P_1, P_2 .... die Prismen

der ersten Pyramide; durch $p, p_1, p_2, p_3 \ldots$ die Prismen der zweiten Pyramide, so ist

$$P_1 = p;\ P_2 = p_1;\ P_3 = p_2 \ldots \text{ (§. 126. Zus. 2.)}.$$

Nun hat man offenbar:

$$P + P_1 + P_2 + P_3 \ldots > \text{Pyr. } ABDC$$
$$p + p_1 + p_2 + p_3 \ldots < \text{Pyr. } abdc; \text{ daher}$$
$$- \quad - \quad + \qquad <$$
$$P \qquad > \text{Pyr. } ABDC - \text{Pyr. } abdc.$$

Der Unterschied der beiden Pyramiden ist also immer kleiner als das erste Prisma; da wir aber die Höhe der Prismen in so kleine Theile theilen können, als wir wollen, so kann man P so klein nehmen, als man will, so daß P kleiner wird, als jede angebbare Größe; also ist der Unterschied beider Pyramiden kleiner als jede noch so kleine Größe; daher der Unterschied Null, oder beide Pyramiden sind gleich.

§. 136. Lehrs. Eine dreiseitige Pyramide ist der dritte Theil eines dreiseitigen Prisma, das mit der Pyramide gleiche Grundfläche und Höhe hat (Fig. 102.).

Bew. Im dreiseitigen Prisma ABCDEF lege man eine Ebene durch AFB, so wird vom Prisma die dreiseitige Pyramide ABCF abgeschnitten. Der vom Prisma noch übrige Körper ist DEFBA. Nun lege man durch BFD eine Ebene, so entstehen wieder zwei Pyramiden DEFB, und ADFB.

Nun ist Pyr. ABCF = Pyr. DEFB (§. 135.; die Grundflächen sind ABC, DEF; die Spitzen sind F, B); eben so: Pyr. ABCF = Pyr. ADFB (§. 135.; die Grundflächen sind AFC, AFD; die gemeinschaftliche Spitze ist B); daher: Pyr. ABCF = Pyr. DEFB = Pyr. ADFB; nun ist: Prisma ABCDEF = Pyr. ABCF + Pyr. DEFB + Pyr. ADFB; oder Prisma ABCDEF = 3 Pyr. ABCF; daher:

$$\tfrac{1}{3} \text{ Prisma } ABCDEF = \text{Pyr. } ABCF.$$

Es haben aber Prisma und Pyramide die gleiche Grundfläche ABC, und gleiche Höhe (§. 100. Zus. 1.).

Zus. 1. Da Prismen einander gleich sind, wenn sie gleiche Grundfläche und gleiche Höhe haben, und unter derselben Be-

dingung auch Pyramiden einander gleich sind, so ist jede Pyramide der dritte Theil eines Prisma, wenn beide Körper gleiche Grundflächen und gleiche Höhen haben; denn zerlegt man die gleichen Grundflächen in gleiche Dreiecke, so erhält man dadurch dreiseitige Prismen und Pyramiden mit gleichen Grundflächen und gleichen Höhen; mithin der Lehrsatz anwendbar. (Man vergl. auch §. 126. Zus. 3.)

Zus. 2. Zwei Pyramiden verhalten sich bei gleicher Grundfläche wie ihre Höhen; bei gleichen Höhen, wie ihre Grundflächen; zwei Pyramiden verhalten sich, wie die Produkte aus Grundfläche und Höhe. (Vergl. §§. 128., 129., 130., u. Lehrs.)

Vierter Abschnitt.

Cylinder. Kegel. Kugel.

§. 137. Erkl. (Fig. 103.) Bewegt sich das Rechteck CADB um die unbewegliche Seite CB, bis es wieder in seine vorige Lage zurückkehrt, so beschreiben die beständig auf CB senkrechten Geraden CA, BD kongruente parallele Kreise; AD aber beschreibt eine krumme Fläche; beide Kreise nebst der krummen Fläche begrenzen einen Körper, welcher Cylinder heißt. Die Gerade CB heißt Axe des Cylinders; die kongruenten parallelen Kreise sind Grundflächen; die durch AD beschriebene krumme Fläche heißt Cylinderfläche (Cylindermantel).

Zus. Die Axe CB steht auf den Grundflächen senkrecht (§. 92.); in dieser Beziehung heißt der Cylinder ein gerader oder senkrechter; außerdem heißt er ein schiefer, dessen Untersuchung aber das Gebiet der Elemente überschreitet.

§. 138. Lehrs. Eine Ebene, durch die Axe des Cylinders gelegt, schneidet den Cylinder in einem Rechtecke.

Bew. Sey die Durchschnittsfigur die Ebene NK (Fig. 103.); denkt man sich, CD sey durch Umdrehung um CB in die Lage gekommen, daß CA mit CE, also auch BD mit BF zusammenfällt, mithin AE, DF gerade Linien sind, so fällt A auf E, D auf F, also auch AD auf EF; mithin ist CD = CF; und da AE

++ DF; AD ++ EF, so ist ED ein Parallelogramm; dreht sich nun das Rechteck ED um CB, so wird, wenn CA auf CM fällt, auch CE auf CN, eben so, da dann BD auf BK fällt, BF auf BL, mithin auch AD auf MK, EF auf NL fallen; die beiden Figuren ED, NK decken sich nun; da aber ED ein Parallelogramm, so ist NK ebenfalls ein Parallelogramm.

Zus. 1. Auf jeder der Peripherien der Grundflächen des Cylinders gibt es einen Punkt, so daß die Gerade zwischen beiden Punkten ganz in die Cylinderfläche fällt; ist der fragliche Punkt auf der einen Peripherie M, so lege man durch MCB eine Ebene; diese schneidet die andere Peripherie in K (und L), und K ist der dem M entsprechende Punkt.

Zus. 2. Zieht man durch einen beliebigen Punkt A der Peripherie eine Parallele zur Axe CB, so liegt diese Parallele ganz in der Cylinderfläche; denn offenbar muß sie, als parallel der CB, in der Ebene ACB liegen; läge nun die durch A mit CB gezogene Parallele nicht in der Cylinderfläche, so könnte man AD ziehen (Zus. 1.); diese wäre durch A der CB parallel; also hätte man in einer Ebene durch einen Punkt zwei Parallelen zu einer Geraden (§. 14.).

Zus. 3. Cylinder von gleicher Grundfläche und Höhe sind kongruent.

§. 139. Lehrs. Eine Ebene, parallel zur Grundfläche durch den Cylinder gelegt, schneidet diesen in einem der Grundfläche gleichen Kreise.

Bew. Sey die Figur PSQ ++ FKD (Fig. 103.); sey O der Durchschnitt der Axe und der Ebene; durch die Axe CB lege man die Ebene CK, so schneidet diese die Oberfläche in der Geraden MRK ++ CB; da aber CM ++ OR (§. 100.), so ist CR ein Parallelogramm; daher CM = OR; eben so läßt sich zeigen, daß, wenn wir durch CB die Ebene ACB legen, CA = OQ; da nun CA = CM, so ist auch OQ = OR; mithin die Punkte R, Q, und so jeder andere Punkt der krummen Linie PRQ gleichweit von O entfernt; daher diese Linie die Peripherie eines Kreises.

§. 140. Lehrs. Ein Cylinder ist einem Prisma gleich, wenn beide Körper bei gleicher Grundfläche auch gleiche Höhe h haben.

Bew. (Fig. 62.) Ueber dem regulären n Ecke im Kreise ABD .... A sey ein senkrechtes Prisma mit der Höhe h konstruirt; eben so sey über die Peripherie des Kreises ABD .... A ein (senkrechter) Cylinder mit der Höhe h konstruirt, so fallen je zwei Grundflächen dieser Körper in eine Ebene (§. 102. Zus. 2.); nun ist offenbar der Cylinder größer, als das Prisma (letzteres ist ein Theil, der Cylinder als Ganzes betrachtet); da sich Prismen bei gleicher Höhe verhalten wie die Grundflächen, so ist das über das 2n Eck im Kreise konstruirte senkrechte Prisma größer, als das Prisma mit dem n Ecke als Grundfläche, man hat also:

$$\begin{array}{l} \text{Cyl.} = \text{Cyl} \\ 2n \text{ Eck Prisma} > n \text{ Eck Prisma; daher} \\ \hline \text{Cyl.} - 2n \text{ Eck Prisma} < \text{Cyl.} - n \text{ Eck Prisma,} \end{array}$$

d. h. die Differenz zwischen einem Cylinder und einem über dem in die Grundfläche des Cylinders beschriebenen, regulären Polygon konstruirten Prisma (gleiche Höhe in beiden Körpern immer vorausgesetzt) ist um so kleiner, je größer die Zahl der Seiten des Polygons ist.

Ueber dem regulären n Ecke KLM .... K um den Kreis sey ein senkrechtes Prisma mit der Höhe h beschrieben, so ist dieses Prisma offenbar größer, als der über dem Kreise ABD .... A beschriebene Cylinder (mit der Höhe h).

Aus dem oben angeführten Grunde ist das Prisma mit der Höhe h, konstruirt über das reguläre, um den Kreis beschriebene 2n Eck, kleiner, als das Prisma mit dem n Ecke als Grundfläche; d. h.

$$\begin{array}{l} n \text{ Eck Prisma} > 2n \text{ Eck Prisma;} \\ \text{Cyl.} = \text{Cyl.; daher:} \\ \hline n \text{ Eck Prisma} - \text{Cyl.} > 2n \text{ Eck Prisma} - \text{Cyl.;} \end{array}$$

d. h. die Differenz zwischen einem über das, um die Grundfläche

eines Cylinders beschriebene, reguläre Polygon konstruirten Prisma und dem Cylinder ist um so kleiner, je größer die Zahl der Seiten des regulären Polygons wird.

Der Cylinder ist also die Grenze, der sich die beiden Prismen immer mehr nähern; und da wir die Zahl der Seiten der regulären Vielecke beliebig groß nehmen können, so können wir diese so groß nehmen, daß die Differenz zwischen dem Prisma und dem Cylinder kleiner wird, als jede angebbare Größe; d. h. der Cylinder ist dem Prisma gleich.

Zus. Zwei Cylinder verhalten sich, wie die Produkte aus ihren Grundflächen und Höhen; also bei gleichen Grundflächen wie die Höhen, und bei gleichen Höhen wie die Grundflächen; da aber die Grundflächen Kreise sind, und diese sich verhalten, wie die Quadrate ihrer Radien, so verhalten sich Cylinder von gleichen Höhen, wie die Quadrate der Radien der Grundflächen.

§. 141. Erkl. (Fig. 104.) Bewegt sich das rechtwinkliche Dreieck DCB um die unbewegliche Kathete DC, bis es wieder in seine vorige Lage zurückkehrt, so beschreibt die beständig auf CD senkrechte CB einen Kreis; die Hypotenuse DB aber beschreibt eine krumme Fläche; der Kreis nebst der krummen Fläche begrenzen einen Körper, welcher Kegel heißt; der von CB beschriebene Kreis heißt Grundfläche; die von der Hypotenuse beschriebene Fläche heißt Kegelfläche (Mantel des Kegels); die Gerade DC heißt Axe, so wie der Punkt C die Spitze des Kegels. Die Senkrechte von der Spitze auf die Grundfläche ist die Höhe des Kegels.

Zus. Da DC auf CB in jeder Lage senkrecht steht, so steht die Axe auf der Grundfläche senkrecht; also ist die Axe zugleich die Höhe; daher heißt der Kegel ein gerader oder senkrechter; außerdem heißt er schief.

§. 142. Lehrs. Eine durch die Axe gelegte Ebene schneidet den Kegel in einem Dreiecke. (Im geraden Kegel ein gleichschenkliches.) (Fig, 104.)

Bew. Durch die Punkte D, C, E sey eine Ebene gelegt, so schneidet sie die Grundfläche in der geraden FE; DCB sey das Dreieck, durch dessen Umdrehung der Kegel entstanden ist; denkt man sich das Dreieck DCB sey durch Umdrehung in die Lage von DCA gekommen, so daß CB, CA eine Gerade bilden, so fällt B auf A; daher auch DB auf DA; also DB = DA; dreht sich nun das Dreieck ADB um DC so, daß CB auf CE fällt, so muß B auf E, CA auf CF, also auch DA auf DF fallen; mithin ADB ≌ FDE; nun ist ADB ein gleichschenkliches Dreieck; also auch FDE (Axendreieck).

Zus. Jede durch die Axe des Kegels gelegte Ebene schneidet die Oberfläche in einer Geraden; eben so fällt jede Gerade zwischen der Spitze und einem beliebigen Punkte der Peripherie der Grundfläche ganz in die Oberfläche des Kegels; denn fiele z. B. die Gerade DE nicht in die Oberfläche, so könnte man durch DCE eine Ebene legen, welche die Oberfläche in der Geraden DE schneidet (Lehrs.); also gäbe es durch zwei Punkte zwei verschiedene Gerade (gegen §. 3.).

§. 143. Lehrs. Die Durchschnittsfigur einer durch einen beliebigen Punkt des Kegels mit der Grundfläche parallel gelegten Ebene ist ein Kreis.

Bew. (Fig. 104.) Durch den Punkt O der Axe DC sey eine Ebene parallel zur Grundfläche gelegt. Durch DC lege man die Ebenen DCE, DCB, so sind DE, DB gerade Linien, welche den Umfang der Durchschnittsfigur schneiden in den Punkten M, L; die Durchschnitte der parallelen Ebenen KML, AEB mit den Ebenen DCE, DCB sind beziehungsweise parallel (§. 100); also OM ∥ CE; OL ∥ CB; daher hat man:

$$\left.\begin{aligned} DO : OL &= DC : CB \\ DO : OM &= DC : CE \end{aligned}\right\} \text{§. 47.}$$

daher auch OL : OM = CB : CE (Arithm.);
nun ist CB = CE; also auch OL = OM; mithin sind die Punkte M, L, und so jeder andere Punkt des Umfanges vom Punkte O gleichweit entfernt: die Punkte L, M.... liegen also in der Peripherie eines Kreises, dessen Mittelpunkt O ist.

Zus. 1. Durch die parallel zur Grundfläche AEB gelegte Ebene KML wird der Kegel in zwei Theile getheilt, von denen der obere KMLD ein vollständiger Kegel ist; der untere AEBLMK heißt abgekürzter Kegel, dessen Höhe eine Senkrechte von einem Punkte der obern Grundfläche auf die untere ist.

Zus. 2. Man hat: $DO : DC = OL : CB$; also

$DO^2 : DC^2 = OL^2 : CB^2$; (Arithm.);

da aber: $KML : AEB = OL^2 : CB^2$ (§. 76. Zus. 5); so folgt: $KML : AEB = DO^2 : DC^2$;

d. h. die Grundfläche und die ihr parallele Durchschnittsfigur eines Kegels verhalten sich, wie die Quadrate ihrer Entfernung von der Spitze.

§. 144. Lehrs. Der Kegel ist gleich einer Pyramide, wenn beide Körper gleiche Grundfläche und Höhe haben.

Bew. (Fig. 62.) Denkt man sich über dem Kreise ABD.... A einen (senkrechten) Kegel mit der Höhe h errichtet; ebenso eine Pyramide konstruirt über dem in dem Kreise beschriebenen regulären n Ecke, deren Höhe h mit der des Kegels zusammenfällt, so daß beide Körper die nemliche Spitze haben, so ist offenbar der Kegel größer, als die Pyramide mit dem n Ecke als Grundfläche; aber da sich Pyramiden bei gleicher Höhe verhalten, wie ihre Grundflächen; so ist eine Pyramide mit der Höhe h, über dem 2n Ecke als Grundfläche construirt, größer als die Pyramide mit dem n Ecke als Grundfläche. Man hat also:

$$\text{Kegel} = \text{Kegel}$$
$$2n \text{ Eck Pyr.} > n \text{ Eck Pyr.}; \text{ daher}$$
$$\overline{\text{Kegel} - 2n \text{ Eck Pyr.} < \text{Kegel} - n \text{ Eck Pyr.}}$$

Vergleicht man auch den Kegel mit den Pyramiden, die als Grundfläche reguläre, um den Kreis beschriebene, Polygone haben (man sehe §. 139.); so ergibt sich zuletzt, daß die Differenz zwischen diesem Kegel und den so konstruirten Pyramiden kleiner werde, als jede angebbare Zahl; d. h. Kegel und Pyramide sind unter der, im Lehrsatz ausgesprochenen Bedingung einander gleich.

Zus. 1. Zwei Kegel verhalten sich, wie die Produkte aus

Grundfläche in die Höhe; also bei gleicher Grundfläche wie die Höhe; und bei gleicher Höhe wie die Grundfläche, oder §. 139. Zus. wie die Quadrate der Radien der Grundflächen.

Zus. 2. Der Kegel ist der dritte Theil eines Prismas oder Cylinders, mit dem er gleiche Grundfläche und Höhe hat.

§. 145. Erkl. Bewegt sich der Halbkreis APB um den Durchmesser ACB (Fig. 105.), bis er in seine vorige Lage zurückkehrt, so beschreibt die halbe Peripherie eine krumme Fläche, die einen Körper begrenzt; der so begrenzte Körper heißt Kugel; die krumme Fläche heißt Oberfläche der Kugel.

Zus. 1 Da jeder Punkt der Oberfläche der Kugel bei der Umdrehung der Peripherie mit irgend einem Punkte dieser Peripherie zusammenfällt; alle Punkte der Peripherie aber vom Mittelpunkte C gleichen Abstand haben, so stehen auch alle Punkte der Kugeloberfläche gleichweit vom Mittelpunkte C der Kugel ab; ein solcher Abstand, also die Gerade zwischen dem Mittelpunkte und einem Punkte der Oberfläche, heißt Radius der Kugel, die also alle einander gleich sind.

Zus 2. Eine Gerade, die zwei Punkte der Kugeloberfläche verbindet, heißt Sehne; geht sie durch den Mittelpunkt der Kugel, so wird sie ein Durchmesser, der gleich zwei Radien ist; daher alle Durchmesser einander gleich.

Anmerk. Man vergl. §. 22. Zus. 5.

§. 146. Lehrs. Legt man durch die Kugel eine Ebene, so ist die Durchschnittsfigur der Ebene und der Kugel ein Kreis (Fig. 106.).

Bew. Geht die Ebene durch den Mittelpunkt der Kugel C, so schneiden die Ebene und Kugeloberfläche sich in einer krummen Linie AKMBOA.

Nehmen wir in dieser krummen Linie die beliebigen Punkte K, M; ziehen CK, CM, so ist CK=CM (§, 145. Zus. 1.); daher die Punkte K, M, und so jeder Punkt der krummen Linie von einem Punkte C gleichweit entfernt; daher die Linie die Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkte C.

Geht die Ebene nicht durch den Mittelpunkt, wie in der

Figur DPQEGD, so ziehe man auf die Ebene DQE vom Mittelpunkte der Kugel C aus, die Senkrechte CF; nehme in der krummen Linie DQG die beliebigen Punkte Q, P; ziehe FP, FQ, CP, CQ. Nun ist:

CF = CF

CP = CQ (§. 145. Zus. 1.)

∧ CFP = ∧ CFQ (§. 92 Zus);

daher △ CFP ≌ △ CFQ (IV.);

mithin auch FP = FQ;

also sind die Punkte P, Q, und so jeder andere Punkt der krummen Linie vom Punkte F gleich weit entfernt; daher die Linie DQG die Peripherie eines Kreises mit dem Mittelpunkte F.

Zus. 1. Im rechtwinklichen Dreiecke CPF (Fig. 106.) hat man:

$$FP = \sqrt{CP^2 - CF^2};$$

d. h. der Radius des Durchschnittskreises einer Ebene und Kugel wird um so größer, je geringer seine Entfernung vom Mittelpunkte ist; daher am größten, wenn die Ebene durch den Mittelpunkt selbst gelegt wird; in diesem Falle heißt er ein größter Kreis, dessen Radius gleich dem Radius der Kugel ist.

Zus. 2. Jede vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene eines Kugelkreises senkrecht gezogene Gerade geht durch den Mittelpunkt des Kreises, und umgekehrt; verbindet man den Mittelpunkt eines Kugelkreises mit dem Mittelpunkte der Kugel durch eine Gerade, so steht diese Gerade auf der Ebene des Kreises senkrecht. Die erste Behauptung ergibt sich unmittelbar aus dem Lehrsatze; die zweite aber aus der Kongruenz der Dreiecke (II.); ist nemlich CF diese Gerade, und man zieht die Durchmesser PFG, QFS; endlich die Geraden CP, CQ, CS, CG, so ist △ CFP ≌ △ CFG (II); daher;

∧ CFP = ∧ CFG = R; ebenso:

∧ CFS = ∧ CFQ = R;

daher CF auf zwei Geraden in der Ebene, also auf der Ebene senkrecht (§. 92.).

Zus. 3. Errichtet man auf der Ebene eines Kugelkreises

durch dessen Mittelpunkt F eine Senkrechte, so geht sie, genugsam verlängert, durch den Mittelpunkt der Kugel; denn ginge sie nicht durch den Mittelpunkt, so könnte man die Gerade CF ziehen (Zus. 2.): diese geht durch den Mittelpunkt, und steht auf der Ebene des Kreises senkrecht; man hätte dann durch einen Punkt auf der Ebene zwei Senkrechte auf ihr, was unmöglich ist (§. 94.).

Zus. 4 Die Peripherien zweier Kugelkreise können sich nur in zwei Punkten schneiden (§. 60.).

Zus. 5. Größte Kugelkreise schneiden sich in Durchmessern, und halbiren einander; denn da sie durch den Mittelpunkt gehen, so schneiden sie sich in einer durch den Mittelpunkt gehenden Geraden, also in einem Durchmesser; der Durchmesser aber halbirt die Kreise (§. 22. Zus. 4.). Durch zwei oder mehr Ebenen, welche sich sämmtlich in einem Durchmesser schneiden, wird die Kugel in keilförmige Kugelausschnitte getheilt, deren jeder von zwei größten Halbkreisen und einem Theile der Oberfläche begrenzt wird; dieser Theil der Oberfläche heißt Kugelstreifen (Kugelzweieck).

Zus. 6. Gleiche Kugelkreise sind vom Mittelpunkte gleich weit entfernt u. s. f. Vergleiche §. 64. Die Beweise ergeben sich ganz analog.

Zus. 7. Der von einem Kugelkreise DQG (Fig. 106.) abgeschnittene Theil der Kugel DQEL heißt Kugelabschnitt.

§. 147. Lehrs. Ein größter Kreis halbirt die Kugel (Halbkugel) (Fig. 106.).

Bew. Legt man die Halbkugel ALB so in die Halbkugel AHB, daß der Kreis AOM den Kreis AOM deckt, so muß jeder Punkt L der Oberfläche der einen Halbkugel auf einen Punkt der Oberfläche der andern Halbkugel fallen, weil außerdem die Radien der Kugel ungleich wären (gegen §. 154. Zus. 1.).

§. 148. Lehrs. Errichtet man durch den Mittelpunkt eines Kugelkreises auf dessen Ebene eine Senkrechte, so schneidet diese verlängert die Oberfläche der Kugel in zwei Punkten, und jeder Punkt der Peripherie des Kugelkreises ist gleich weit von einem dieser Punkte entfernt.

Bew. (Fig. 105) Sey DOE der Kugel-Kreis; pP die Senkrechte auf dessen Ebene durch den Mittelpunkt, welche die Kugelfläche in den Punkten p, P schneidet. Man nehme in der Peripherie des Kreises die beliebigen Punkte O, D; ziehe pD, pO, KD, KO; so ist pKO = R = pKD (Dat.); da nun: pK = pK; KD = KO (§. 145); so ist △ pKD ≌ △ pKO (I.); also pO = pD; also sind alle Punkte der Peripherie von p gleichweit entfernt; für den Punkt P wird der Beweis eben so geführt, wenn man die Geraden PO, PD zieht; u. s. f.

Zus. 1. Diese Punkte p, P heißen deßwegen die Pole für den Kreis DOE. Die Punkte des Kugelkreises haben von den Polen auch gleiche sphärische Entfernung; d. h. legt man durch pDC, pOC Ebenen, so sind die Bogen pD, pO einander gleich, als Bogen gleicher (größter) Kreise, denen gleiche Sehnen pD, pO entsprechen.

Zus. 2. Verbindet man die Pole eines Kreises durch eine Gerade, so geht sie durch den Mittelpunkt des Kreises und steht auf dessen Ebene senkrecht; geht also auch durch den Mittelpunkt der Kugel; denn ginge sie nicht durch den Mittelpunkt des Kreises, so könnte man durch dessen Mittelpunkt eine senkrechte errichten; diese würde ebenfalls durch die Pole gehen; wir hätten also durch zwei Punkte zwei verschiedene Gerade.

Zus. 3. Eine Ebene, durch eines Kreises Pole gelegt, steht auf dem Kreise senkrecht, halbirt ihn, und schneidet die Kugel in einem größten Kreise; denn die Gerade, welche die Pole verbindet, steht auf dem entsprechenden Kreise durch dessen Mittelpunkt senkrecht (Zus. 2.), und geht also durch den Mittelpunkt der Kugel (§. 146. Zus. 3.); daher auch die durch die Pole gelegte Ebene durch den Mittelpunkt geht.

Zus. 4. Parallele Kreise einer Kugel haben einerlei Pole; und haben die Kreise einer Kugel einerlei Pole, so sind sie parallel; denn im ersten Falle geht die durch den Mittelpunkt eines Kreises auf die Ebene desselben senkrecht Gezogene durch den Mittelpunkt der Kugel (§. 146, Zus. 3.); und da sie auf den übrigen Kreisen ebenfalls senkrecht steht (§. 100. Zus. 2.), und

durch deren Mittelpunkt geht, so geht sie durch die Pole jedes dieser Kreise; im zweiten Falle steht eine Gerade durch die Pole auf allen Kreisen durch den Mittelpunkt senkrecht (Zus. 2.); daher die Kreise parallel (§. 99.).

Der zwischen zwei parallelen Kreisen abgeschnittene Theil der Kugeloberfläche heißt Zone; so wie der Theil der Kugel zwischen zwei Parallelebenen körperliche Zone heißt.

Zus. 5. Legt man einen Kreis durch die Pole eines größten Kreises, so liegen des ersten Kreises Pole in der Peripherie des zweiten; und die Bogen zwischen den Polen und den Durchschnitten der Peripherien sind Quadranten; denn im ersten Falle stehen die Kreisebenen aufeinander senkrecht (Zus. 3.); und da in ihrem Durchschnitte der Mittelpunkt liegt, so liegt jede Senkrechte auf der einen Ebene durch den Mittelpunkt des Durchschnittes ganz in der andern Ebene. In dieser Senkrechten aber liegen des ersten Kreises Pole (Lehrsatz); die Bogen aber zwischen den Polen und den Durchschnittspunkten sind Quadranten, weil ihre entsprechenden Centriwinkel rechte sind; jeder der beiden Pole eines größten Kreises ist also von dessen Peripherie um 90° entfernt.

§. 149. Lehrs. Steht eine Ebene durch den Endpunkt des Radius auf diesem senkrecht, so hat sie mit der Oberfläche nur einen einzigen Punkt gemeinschaftlich, den Endpunkt des Radius.

Bew. (Fig. 105.) Stehe die Ebene MN durch B auf CB senkrecht; man nehme in der Ebene MN den beliebigen Punkt F, und ziehe CF, so ist $CF > CB$ (§. 94. Zus. 1.) also liegt jeder Punkt der Ebene, ausgenommen Punkt B, außerhalb der Kugeloberfläche.

Zus. 1. Diese Ebene heißt deßwegen Berührungsebene (Tangentialebene) der Kugel.

Zus. 2. Ist eine Ebene Berührungsebene der Kugel, d. h. hat sie mit der Oberfläche derselben nur einen Punkt gemeinschaftlich, so steht der Kugelradius durch diesen Punkt auf der Ebene senkrecht, denn jede andere Gerade vom Mittelpunkte der Kugel auf die Ebene gezogen, ist größer als der Radius; also

der Radius die kürzeste Linie von einem Punkte auf die Ebene, mithin senkrecht.

§. 150. Erkl. Werden drei oder mehrere Ebenen durch den Mittelpunkt der Kugel so gelegt, daß nur je zwei dieser Ebenen einen Durchmesser gemeinschaftlich haben, so wird die Kugel dadurch in mehrere Theile getheilt; jeder solcher Theil heißt ein pyramidaler Kugelausschnitt; schneiden sich (Fig. 106.) die drei größten Kreise ALBHA, AOBM, RTUV, so haben diese Ebenen den Mittelpunkt C der Kugel gemeinschaftlich; sie bilden also ein körperliches Dreieck BRCVB, dessen Scheitel in C ist. Dieses körperliche Dreieck als pyramidaler Ausschnitt mit der Spitze C betrachtet, hat also als Grundfläche den, von drei Bogen BR, RV, VB größter Kreise eingeschlossenen Theil der Kugeloberfläche VBR, welcher ein sphärisches Dreieck heißt; die Bogen BR, RV, VB heißen Seiten des sphärischen Dreiecks; so wie die von diesen Bogen auf der Oberfläche gebildeten Winkel BRV, RVB, VBR die Winkel dieses sphärischen Dreiecks. Eine einfache Betrachtung läßt erkennen, daß die Seiten des sphärischen Dreiecks mit den Kantenwinkeln des entsprechenden körperlichen Dreiecks, so wie die Winkel des sphärischen Dreiecks mit den Flächenwinkeln des körperlichen Dreiecks identisch sind; alle Sätze, die also vom körperlichen Dreiecke aufgestellt wurden, gelten auch von sphärischen Dreiecken (§. 110. ff.), so lange bei der Betrachtung der sphärischen Dreiecke die Größe des Kugelradius gleichgültig bleibt.

§. 151. Lehrs. Um und in jede dreiseitige Pyramide läßt sich eine Kugel beschreiben (Fig. 107).

Bew. Sey die dreiseitige Pyramide ACBD. Um eine Kugel zu beschreiben, so, daß in der Oberfläche sämmtliche Ecken der Pyramide liegen (also die Kugel um die Pyramide zu beschreiben), lege man auf die Kante AC durch den Mittelpunkt E eine Ebene senkrecht, so sind alle Punkte dieser Ebene von den Ecken A und C gleichweit entfernt (§. 94. Zus. 3.). Eben so sind die Punkte einer Ebene, die auf der Kante CB durch deren Mitte F senkrecht gelegt ist, gleichweit von den Ecken C und B

entfernt; beide durch E und F gelegte Ebenen schneiden sich in einer Geraden; daher alle Punkte dieser Geraden gleiche Entfernung von den Ecken A, C, B haben. Legt man endlich auf die Kante AD eine Ebene durch deren Mitte K senkrecht, so sind von allen Punkten dieser Ebene die Ecken A und D gleichweit entfernt; diese letzte Ebene schneidet den Durchschnitt der beiden ersten Ebenen in einem Punkte, und dieser Durchschnittspunkt der drei Ebenen ist der Mittelpunkt der zu beschreibenden Kugel, deren Halbmesser man erhält, wenn man von diesem Mittelpunkte zu einem beliebigen Ecke der Pyramide eine Gerade zieht. Denn beschreibt man aus diesem Punkte mit dem angezeigten Radius eine Kugel, so liegen alle Ecken der Pyramide in der Kugeloberfläche. Zu bemerken ist, daß die drei senkrecht halbirten Kanten nicht in einer Ebene liegen dürfen.

Um in eine jede dreiseitige Pyramide eine Kugel zu beschreiben, lege man durch drei (nicht in einem Punkte sich schneidende) Kanten drei Ebenen so, daß durch diese Ebenen die an den Kanten gebildeten Flächenwinkel beziehungsweise halbirt werden, so schneiden diese drei Ebenen sich in einem Punkte; dieser Punkt ist der Mittelpunkt der zu beschreibenden Kugel, deren Radius man erhält, wenn man vom Mittelpunkte eine Senkrechte auf eine beliebige Seitenfläche der Pyramide zieht (§. 108.).

Zus. 1. Auf die nemliche Art läßt sich um und in jedes reguläre Polyeder eine Kugel beschreiben.

Zus. 2. Legt man durch den Mittelpunkt der Kugel (Zus. 1.) und je eine Kante des regulären Polyeders Ebenen, so wird dadurch das Polyeder in so viele Pyramiden getheilt, als die Oberfläche Ebenen enthält; diese Pyramiden sind alle einander gleich.

§. 152 Lehrs. Die Kugel ist einer Pyramide gleich, welche den Radius als Höhe, die Oberfläche der Kugel aber als Basis hat.

Bew. Denkt man sich sowohl um als in die Kugel ein Polyeder beschrieben, so ist offenbar die Kugel größer, als das

Polyeder in der Kugel, und kleiner als das Polyeder um die Kugel; vermehrt man nun die Zahl der Seitenflächen in beiden Polyedern, so wird die Kugel immer weniger von beiden Polyedern differiren, so daß die Kugel als die Grenze betrachtet werden kann, der sich beide Polyeder um so mehr nähern, je größer man die Anzahl ihrer Flächen nimmt; da man nun die Anzahl der Flächen so groß nehmen kann, als man will, so kann die Kugel, als mit einem solchen Polyeder zusammenfallend, gedacht werden. Legt man nun durch den Mittelpunkt der Kugel und je eine Kante des Polyeders Ebenen, so wird das Polyeder in so viele Pyramiden gelegt, als das Polyeder Flächen hat, die alle ihre Spitze im Mittelpunkte haben: daher läßt sich auch die Kugel in solche Pyramiden zerlegen, die ihre Spitze im Mittelpunkte haben; und deren Grundfläche ein sehr kleiner Theil der Kugeloberfläche ist; alle diese Pyramiden haben aber den Radius der Kugel als Höhe, mithin gleiche Höhe; sind also zusammen einer Pyramide von gleicher Höhe gleich, deren Grundfläche der Grundfläche der Pyramiden zusammen gleich ist; dieser Pyramiden Grundfläche aber ist die Kugel.

Fünfter Abschnitt.

Messung der Körper.

§. 153. Erkl. Bei der Messung der Körper kann berücksichtiget werden:

1) ihre Oberfläche; man soll in diesem Falle bestimmen, wie oft eine ebene Figur als Grundmaß in der Oberfläche enthalten sey; da unter den bisher betrachteten Körpern auch solche sind, die krumme Oberflächen haben, so muß angegeben werden, wie groß eine solche krumme Oberfläche, in eine Ebene ausgebreitet ist; weil nun das Grundmaß bei Flächen ein Quadrat ist (vergl. §. 81.), so sagt man: die Oberfläche quadriren;
2) ihr körperlicher Inhalt; d. h. es kann betrachtet werden, wie oft ein Körper als Einheit in einem andern Körper

enthalten sey; und weil als Körpereinheit ein Würfel (Kubus) genommen wird, so sagt man: einen Körper kubiren.

§. 154. Erkl. Das Grundmaß für Körper ist ein Würfel (senkrechtes Parallelepiped von gleichen Quadraten begrenzt), dessen Seite eine Linie von bekannter Länge, etwa Fuß, ist; daher Kubikfuß.

Theilt man den Längenfuß in 10 Zoll ...., und denkt sich sowohl über dem Längenfuß als über dem Längenzoll Würfel konstruirt, so hat man, wenn man die Fuß und Zoll beziehungsweise mit A, a bezeichnet:

Kubikfuß : Kubikzoll $= A^3 : a^3$ (§. 130.); da nun
$A = 10a$, so hat man: $A^3 = 1000a^3$; daher
Kubikfuß : Kubikzoll $= 1000a^3 : a^3$
$= 1000 : 1$; d. h.
$1c' = 1000c''$;

daher der Kubikfuß in 1000 Kubikzoll, der Kubikzoll in 1000 Kubiklinien .... eingetheilt wird. 1000 Kubikfuß geben eine Kubikruthe.

Sind zwei Gerade in einem Längenmaße gegeben, so verhalten sich die über den Geraden konstruirten Würfel, wie die dritten Potenzen (Kubuse) der die Geraden ausdrückenden Zahlen.

Nach dem neuen französischen Maße ist das Körpermaß der Würfel des **Decimètre**, **Litre** genannt, dessen Unter- und Oberabtheilungen, als **Decilitre**, ... **Decalitre**, **Hectolitre** .... sich leicht bestimmen lassen. Nimmt man als Grundmaß eines Würfels das mètre, so heißt er **Stère**.

§. 155. Lehrs. Man erhält die Oberfläche eines Prisma, wenn man alle einzelnen Flächen, sowohl Seitenflächen als Grundflächen (nach §. 86. ff.) berechnet, und die diese Flächen ausdrückenden Zahlen addirt.

Bew. folgt aus der Anschauung.

Anmerk. Wir werden in Zukunft jede Grundfläche mit g, Höhe mit h bezeichnen.

Zus. 1. Ist in einem senkrechte Prisma die Höhe (Seitenkante) $= h$; und sind die Grundkanten der Reihe nach a, b, c.... so hat man die Oberfläche $2g + ah + bh + ch$.... oder $= 2g + h\ (a + b + c \ldots)$; nun aber ist: $a + b + c$.... der Umfang der Grundfläche; man erhält also die Seitenflächen eines senkrechten Prisma, wenn man das Produkt der Höhe in den Umfang der Grundfläche nimmt.

Zus. 2. Heißt die Seite eines Würfels a, so ist seine Oberfläche $= 6a^2$.

§. 156. Lehrs. Man erhält die Oberfläche einer Pyramide, wenn man die Grundfläche und alle Seitenflächen (Dreiecke) berechnet, und die diese Flächen ausdrückenden Zahlen addirt.

Bew. ergibt sich aus der Anschauung.

Zus. Bei der abgekürzten Pyramide berechnet man beide Grundflächen und die Seitenflächen, die hier Trapezen sind.

§. 157. Lehrs. Bezeichnet r den Radius der Grundfläche eines Cylinders, h die Höhe (oder Axe des senkrechten), so ist die ganze Oberfläche des Cylinders $= 2r\pi\ (r + h)$.

Bew. Die ganze Oberfläche des Cylinders besteht aus den beiden Grundflächen (Kreisen), und der Cylinderfläche (Mantel); heißt nun der Radius der Grundfläche r, so ist eine Grundfläche $= r^2\pi$; also beide Grundflächen $= 2r^2\pi$ (§. 88)

Um die Cylinderfläche zu erhalten, denke man sich (Fig. 103.) diese Fläche auf eine Ebene abgewickelt, so stellt sie sich als Rechteck dar, dessen Höhe $AD = CB$, und dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche ist. Da nun die Peripherie $= 2r\pi$ (§. 85.) so ist der Mantel des Cylinders $= 2r\pi \,.\, h$. Mithin die ganze Oberfläche des Cylinders $= 2r^2\pi + 2r\pi h$. $= 2r\pi\,(r + h.)$

§. 158. Lehrs. Bezeichnet r den Radius der Grundfläche eines Kegels; h dessen Höhe (Axe) so ist die ganze Oberfläche des Kegels $= r\pi\,(r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

Bew. Die Oberfläche des Kegels besteht aus der Grund-

fläche (Kreis), und der Kegelfläche (Mantel). Heißt nun der Radius der Grundfläche r, so ist die Grundfläche $= r^2\pi$.

Um den Mantel zu berechnen, denkt man sich die Oberfläche (Fig. 104.) abgewickelt, so stellt sie sich als Kreisausschnitt dar, dessen Radius **DB**, dessen Bogen aber die Peripherie der Grundfläche ist.

Nun hat man:

$$\text{Sector} : \text{Kreisfl.} = n^\circ : 360^\circ; \text{ daher}$$

$$\text{Sector} = \frac{n^\circ \text{ Kreisfl.}}{360^\circ};$$

die Kreisfläche für den Radius $BD = DB^2\pi$; daher

$$\text{Sect.} = \frac{n^\circ \,.\, DB^2\pi}{360^\circ}.$$

Nun hat man:

$$\text{Bog.} : \text{Periph.} = n^\circ : 360^\circ; \text{ oder}$$

$$2r\pi : 2DB\pi = n^\circ : 360^\circ; \text{ daher}$$

$$DB = \frac{r \,.\, 360}{n}; \text{ also}$$

$$\text{Sect.} = \frac{n \,.\, DB\pi}{360} \,.\, DB = \frac{n \,.\, DB \,.\, \pi}{360} \,.\, \frac{r \,.\, 360}{n} = r \,.\, DB \,.\, \pi$$

Nun ist aber $DB = \sqrt{DC^2 + CB^2} = \sqrt{h^2 + r^2}$; daher der Mantel des Kegels $= r\pi . \sqrt{h^2 + r^2}$.

Mithin die ganze Oberfläche des Kegels $= r^2\pi + r\pi . \sqrt{h^2 + r^2} = r\pi\,(r + \sqrt{h^2 + r^2})$.

Zus. 1. Der Kegelmantel kann als Dreieck betrachtet werden, dessen Grundlinie die Peripherie der Grundfläche, dessen Höhe die Gerade von des Kegels Spitze zu einem beliebigen Punkte der Peripherie der Grundfläche ist.

Zus. 2. Bezeichnen R, r die Radien der Grundflächen, h die Höhe eines abgekürzten Kegels, so ist der Mantel dieses abgekürzten Kegels

$$= \pi(R + r)\sqrt{h^2 + (R - r)^2};$$

denn offenbar erhält man den Mantel des Kegels (Fig. 104.)

AKLB, wenn man von dem Mantel des ganzen Kegels den Mantel des Kegels KDL abzieht; daher hat man, den Mantel des abgekürzten Kegels mit M bezeichnend:

$$M = CB . DB\pi - OK . DL\pi$$
$$= \pi (R . DB - r . DL)$$
$$= \pi (R . DB - r [DB - LB])$$
$$= \pi (DB [R - r] + LB . r) \; .... \; (1$$

Zieht man nun in der Ebene DCB, LR senkrecht auf CB, so ist $LR = OC = h$; nun hat man:

$$LB : RB = DB : BC \text{; oder}$$
$$LB : R - r = DB : R \text{; daher}$$
$$DB = \frac{LB . R}{R - r} \; .... \; (2$$

Substituirt man nun den Werth aus (2 in (1 so hat man:

$$M = \pi (\frac{LB . R}{R - r} [R - r] + LB . r)$$
$$= \pi . LB (R + r) \; .... \; (3$$

da aber $LB = \sqrt{LR^2 + BR^2} = \sqrt{h^2 + (R - r)^2}$, so hat man:

$$M = \pi (R + r) \sqrt{h^2 + (R - r)^2}.$$

Anmerk. Den Mantel eines abgekürzten Kegels kann man als Trapez berechnen; oder als Theil eines Kreisringes.

§. 159. Lehrs. Der zwischen zwei Parallelkreisen abgeschnittene Theil der Kugeloberfläche (Zone) ist dem Mantel eines Cylinders gleich, der als Grundfläche einen größten Kugelkreis, und als Höhe die Entfernung der beiden Parallelkreise (Höhe der Zone) hat; d. i. wenn r den Radius der Kugel bezeichnet, z die Zone, h die Entfernung der beiden Parallelkreise, so hat man:

$$Z = r^2 \pi . h.$$

Bew. (Fig. 108.) Sey pP ein Durchmesser der Kugel, so sind die durch die Punkte K, O des Durchmessers senkrecht auf diesen gelegten Ebenen parallel, und p, P sind die Pole dieser Kreise. Legt man durch pP einen größten Kreis AEPA,

so steht er auf beiden Parallelkreisen senkrecht, und schneidet sie in den Durchmessern DE, AB, und man hat:

$$\wedge COB = R = \wedge CKE.$$

In der Ebene des größten Kreises AEPA ziehe man an dessen Peripherie durch E die Tangente EL, bis sie von der verlängerten OB geschnitten wird in L und ziehe die Gerade CE, und EM senkrecht auf OB. Nun sind die rechtwinklichen Dreiecke CKE, MEL einander ähnlich ($\wedge KEC = \wedge MEL$; daher hat man:

$$KE : CE = EM : EL; \text{ daher}$$

$$EL = \frac{CE \,.\, EM}{KE} \;\ldots\; (1$$

Bewegt sich nun das Trapez EKOL um die Seite KO, so beschreibt es einen senkrechten, abgekürzten Kegel, dessen Höhe $KO = EM = h$ ist; die Gerade EL beschreibt dieses Kegels Mantel. Nun ist der Mantel:

$$M = \pi \,.\, EL\,(OL + KE)\;(\S.\,158 \ldots (3.) \ldots (2$$

Substituirt man (1 in (2, so hat man:

$$M = \pi \,.\, \frac{CE \,.\, EM}{KE}\,(OL + KE) \;\ldots\; (3$$

Nun kann man EM so klein nehmen, als man will; also auch so klein, daß der Mantel des abgekürzten Kegels mit der Oberfläche der Zone zusammenfällt, also $M = Z$ wird; dann aber fallen OL, KE so nahe zusammen, daß man setzen kann: $KE = OL$. Substituirt man dieß in 3), so erhält man:

$$Z = \frac{\pi \,.\, r \,.\, h}{KE} \,.\, 2KE = 2r\pi \,.\, h.$$

Der Ausdruck: $2r\pi \,.\, h$ ist aber der Mantel eines Cylinders, mit der Höhe h, und r als Radius der Grundfläche (§. 157.).

Zus. 1. Um nun die Oberfläche einer Kugel zu bestimmen, denke man, die pP sey in sehr viele Theile getheilt, und durch alle Theilungspunkte seyen Parallelebenen gelegt, so wird dadurch die Kugeloberfläche in lauter Zonen getheilt; die Summe aller Zonen gibt dann die Kugeloberfläche; bezeichnen wir die Kugel-

oberfläche durch S, die Höhe der Zonen durch a, b, c, d....
so hat man:

$$S = 2r\pi . a + 2r\pi . b + 2r\pi . c .... \text{ oder}$$
$$S = 2r\pi (a + b + c....)$$

Nun aber ist: $a + b + c + d .... = 2r$; daher
$$S = 2r\pi . 2r = 4r^2\pi = d^2\pi.$$

Da für den Radius r eines Kreises die Fläche $= r^2\pi$," so ist also die Oberfläche der Kugel vier größten Kreisen gleich.

Zus. 2. Die Kugelhaube DpED (krumme Oberfläche eines Kugelabschnittes) ist nach Lehrs. $= 2r\pi . Kp = 2r\pi\ (r - CK)$.

§. 160. Lehrs. Man erhält den kubischen Inhalt eines Prisma, wenn man die Grundfläche mit der Höhe multiplizirt; d. i.

$$\text{Prisma} = GH.$$

Bew. Es sey eines beliebigen Prisma Grundfläche G, dessen Höhe H; es sey ferner (Fig. 94. b.) pv ein Würfel, dessen Seite pq die Einheit des Längenmaßes ausdrückt; so hat man (§. 130.):

$$\text{Prisma} : pv = HG : ps . pt;$$

da nun ps als Quadrat $= pq^2$, und $pq = pt$, so hat man:

$$\text{Prisma} : 1^{c1} = GH : pq^2 . pq; \text{ oder}$$
$$= GH : pq^3; \text{ oder}$$
$$\text{Prisma} : 1^{c1} = GH : 1; \text{ daher}$$
$$\text{Prisma} = GH . 1^{c1} = GH.$$

Zus. 1. Den kubischen Inhalt eines senkrechten rechtwinklichen Parallelepipeds erhält man, wenn man drei in einem Ecke zusammenstoßende Seiten miteinander multiplizirt.

Zus. 2. Da des Cylinders Grundfläche ein Kreis ist, so erhält man (§. 140.), den körperlichen Inhalt des Cylinders mit Cyl. bezeichnend:

$$\text{Cyl.} = r^2\pi . h.$$

§. 161. Lehrs. Man erhält den kubischen Inhalt einer Pyramide, wenn man das Produkt aus Grundfläche und Höhe mit 3 dividirt; d. i.

$$\text{Pyr.} = \frac{GH}{3}.$$

Bew. Das Produkt GH gibt den Inhalt eines Prisma, das als Grundfläche G, als Höhe H hat. Nun ist aber die Pyramide bei gleicher Höhe und Grundfläche der dritte Theil eines Prisma; man erhält also den Inhalt der Pyramide, wenn man dieses Produkt durch 3 dividirt.

Zus. 1. Heißt der Radius der Grundfläche eines Kegels r, seine Höhe h, so ist:

$$\text{Kegel} = \frac{r^2\pi \,.\, h}{3}.$$

Man vergleiche §. 144. Zus. 2.

Zus. 2. Den kubischen Inhalt einer abgekürzten Pyramide ADda (Fig. 100.) erhält man offenbar, wenn man von der ganzen Pyramide die obere Pyramide adC abzieht.

Sey uns die Grundfläche AD = G; ad = g; OK = h. so hat man, die abgekürzte Pyramide mit Pyr. d. bezeichnend:

$$\begin{aligned}\text{Pyr. d.} &= \frac{G\,.\,CK}{3} - \frac{g\,.\,CO}{3}\\ &= \tfrac{1}{3}(G\,.\,CK - g\,.\,CO).\\ &= \tfrac{1}{3}(G\,.\,(CO + OK) - g\,.\,CO)\\ &= \tfrac{1}{3}([G - g]\; CO + G\,.\,h) \;\ldots\; (1\end{aligned}$$

Nun hat man:

$G : g = CK^2 : CO^2$ (§. 133.); oder

$\sqrt{G} : \sqrt{g} = CK : CO$; oder

$\sqrt{G} : \sqrt{g} = CO + OK : CO$; daher

$$CO = \frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} \ldots\; (2$$

Substituirt man in (1 den Werth von zwei, so erhält man:

$$\begin{aligned}\text{Pyr. d.} &= \tfrac{1}{3}\left([G - g]\,\frac{h\sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}} + Gh\right);\\ &= \tfrac{1}{3}(Gh + h\sqrt{Gg} + hg);\ \text{daher}\end{aligned}$$

$$\text{Pyr. d.} = \tfrac{1}{3}h\,(G + g + \sqrt{Gg}).$$

Löst man in der letzten Gleichung die Klammern auf, so ergibt sich: die abgekürzte Pyramide ist gleich drei Pyramiden, die die nemliche Höhe, wie die abgekürzte Pyramide haben, von denen aber die eine als Grundfläche die untere Grundfläche, die

andere die obere Grundfläche, die dritte die mittlere Proportionalzahl beider Grundflächen der abgekürzten Pyramide hat.

Zuf. 3. Auf ähnliche Art findet man auch den kubischen Inhalt des abgekürzten Kegels, die Radien der Grundflächen mit R, r, die Höhe mit h, den Kegel selbst mit C. d bezeichnend:

$$C.d. = \frac{1}{3}h(R^2 + r^2 + Rr).$$

§. 162. Lehrſ. Bezeichnet man den Radius einer Kugel mit r (Durchmesser = d), so ist der kubische Inhalt der Kugel bezeichnet durch Sph.:

$$Sph. = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$$

Bew. Man hat nach §. 152. §. 161.;

$$Sph. = \frac{r}{3} \cdot G = \frac{r}{3} \cdot 4r^2\pi = \frac{4}{3}r^3\pi = \frac{1}{6}d^3\pi$$

Zuſ. 1. Durch Transposition ergibt sich:

$$r = \sqrt[3]{\frac{3 . Sph.}{4\pi}}.$$

Zuſ. 2. Enthält der Winkel eines keilförmigen Kugelausschnittes (= K. S) n°, so hat man:

$$K.S : Sph. = n° : 360°;$$ daher

$$K.S = \frac{Sph..n°}{360°} = \frac{4}{3}r^3\pi . \frac{n}{360} = \frac{r^3\pi . n}{270}.$$

Zuſ. 3. Der pyramidale Kugelausschnitt CApBC (Fig. 108.) ist $= 2r\pi . Op .. \frac{1}{3}r = \frac{2}{3}r^2\pi . Op.$ .... (1

Der Kegel $CAOP = \frac{AO^2 . \pi . CO}{3}$ .... (2

Subtrahirt man nun (2 von (1, so erhält man:

$$\text{Kugelabschnitt } ApBOA = \frac{2}{3}r^2\pi . Op - \frac{AO^2\pi . CO}{3}$$

$$= \frac{1}{3}\pi(2r^2 Op. - AO^2 . CO).$$

Bezeichnet man nun die Höhe des Abschnittes Op mit h, und berücksichtigt, daß: $AO^2 = AC^2 - CO^2 = AC^2 - (r-h)^2$, so erhält man nach gehöriger Substitution und Vereinfachung:

$$\text{Kugelabschnitt } ApBOA = \frac{1}{3}h^2\pi(3r - h) .... (3$$

Eben so erhält man den Kugelabschnitt DpEKD, wenn man dessen Höhe $Kp = m$ setzt:

Kugelabschnitt $DpEKD = \frac{1}{3} m^2 \pi (3r - m) \ldots,$ (4

Subtrahirt man nun (4 von (3, so erhält man die körperliche Zone ADEB; man hat also:

$$\text{Zone} = \frac{1}{3} h^2 \pi (3r - h) - \frac{1}{3} m^2 \pi (3r - m)$$
$$= \frac{1}{3} \pi (h^2 [3r - h] - m^2 [3r - m]).$$

T. I.

Fig. 1.
Fig. 2.
Fig. 3.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.
Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.
Fig. 12.
Fig. 13.
Fig. 14.
Fig. 15.
Fig. 16.
Fig. 17.
Fig. 18.
Fig. 18 a.
Fig. 18 b.
Fig. 19 a.
Fig. 19 b.
Fig. 21.
Fig. 22.
Fig. 20.
Fig. 23.
Fig. 24.
Fig. 25.
Fig. 26.
Fig. 27.
Fig. 28.
Fig. 29 a.
Fig. 29 b.
Fig. 29 c.
Fig. 30.
Fig. 31.
Fig. 32.
Fig. 34.
Fig. 35.
Fig. 33.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 39.

Fig. 38.
Fig. 40.
Fig. 41.
Fig. 42
Fig. 43.
Fig. 44
Fig. 45.
Fig. 47.
Fig. 46.
Fig. 48.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.
Fig. 52.
Fig. 54.
Fig. 53.
Fig. 55.
Fig. 56.
Fig. 57.
Fig. 58.
Fig. 59.
Fig. 60.
Fig. 61.
Fig. 64.
Fig. 62.
Fig. 63
Fig. 65.
Fig. 66.
Fig. 69.
Fig. 67.
Fig. 68.
Fig. 71.
Fig. 70.
Fig. 72.
Fig. 73.

Fig. 74.
Fig. 75.
Fig. 76.
Fig. 77.
Fig. 78.
Fig. 79.
Fig. 80.
Fig. 81.
Fig. 82.
Fig. 83.
Fig. 84.
Fig. 85.
Fig. 86.
Fig. 87.
Fig. 88.
Fig. 89.
Fig. 90.
Fig. 91.
Fig. 92.
Fig. 93.

Fig. 94. B.

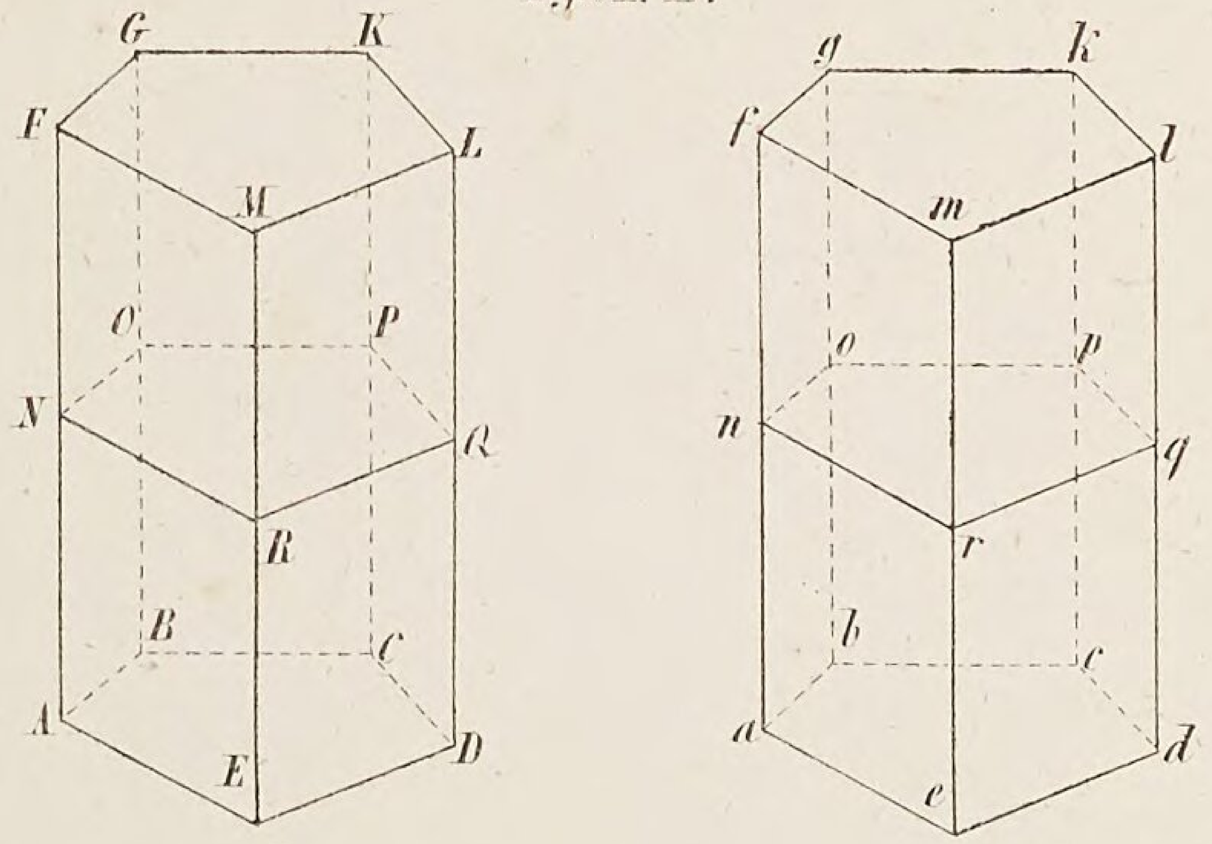


Fig. 94 b.

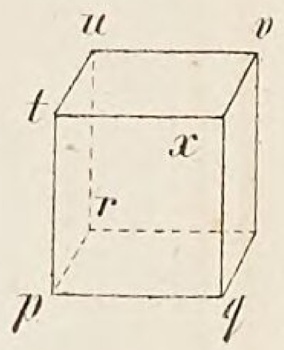


Fig. 95.

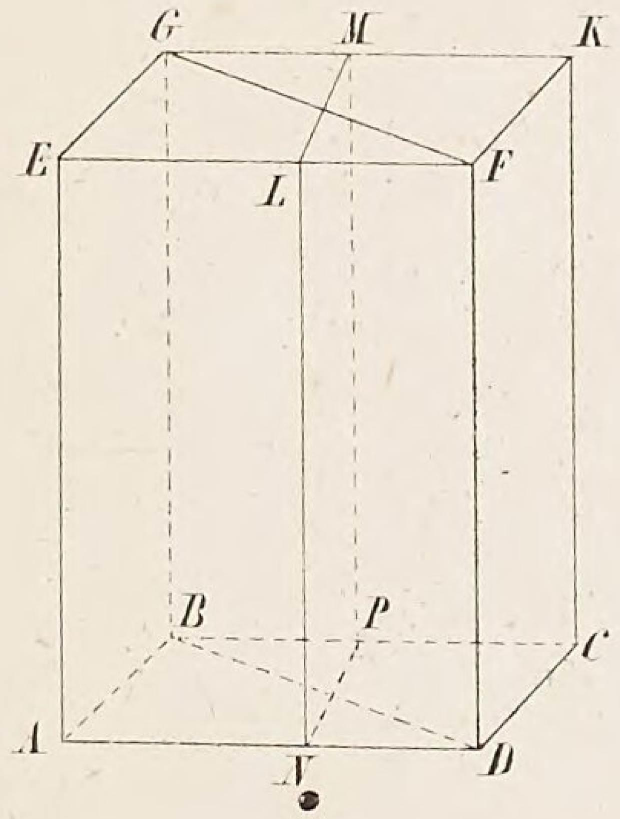


Fig. 96.

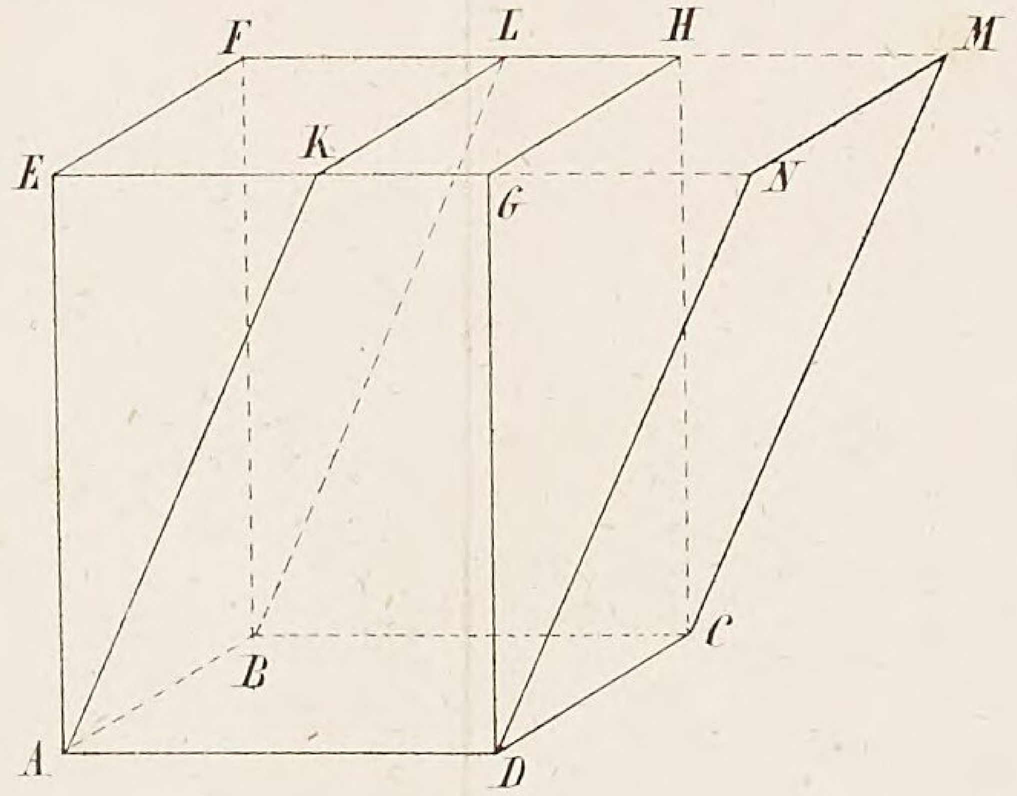


Fig. 97.

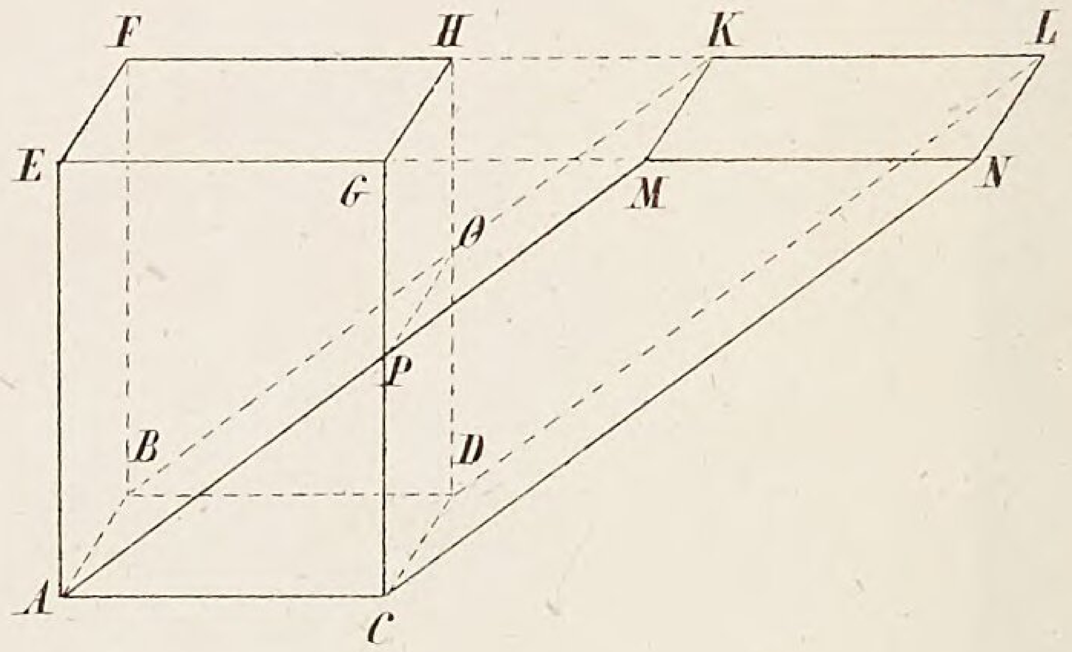


Fig. 98.

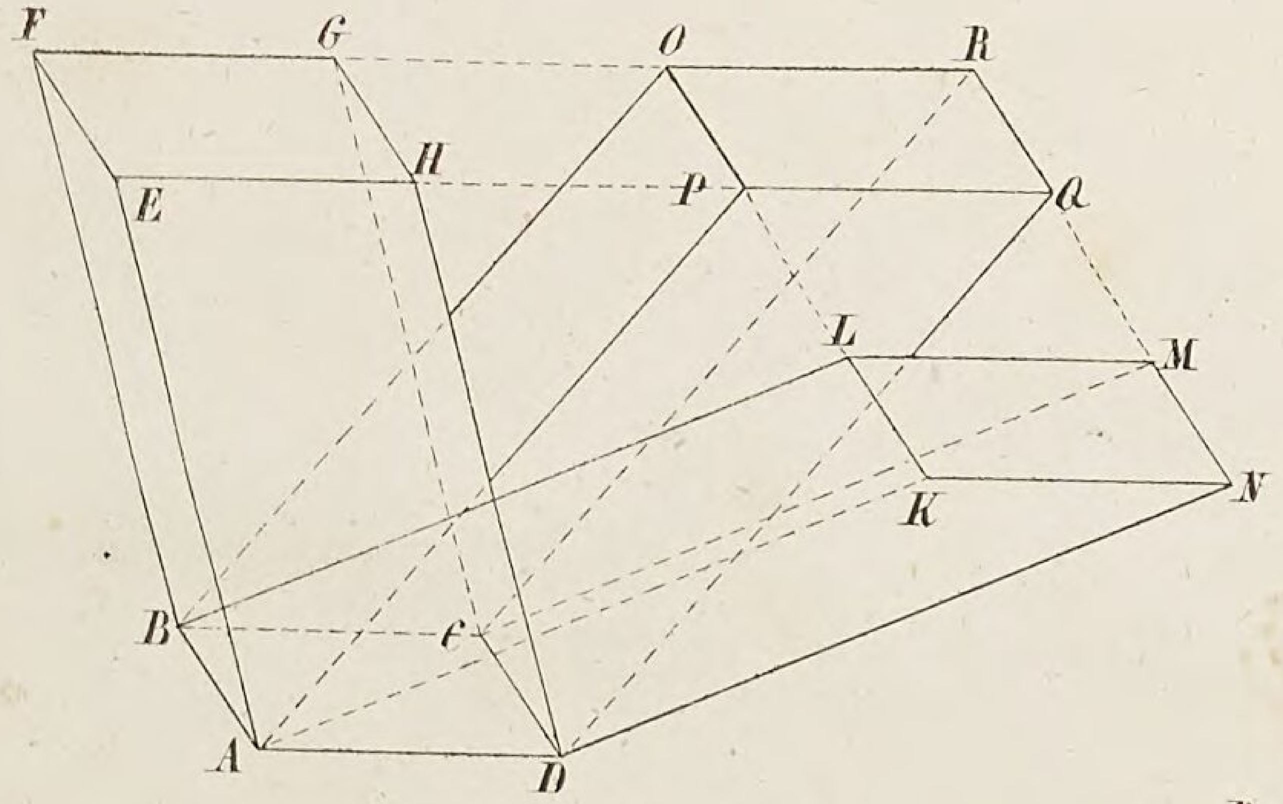


Fig. 99.

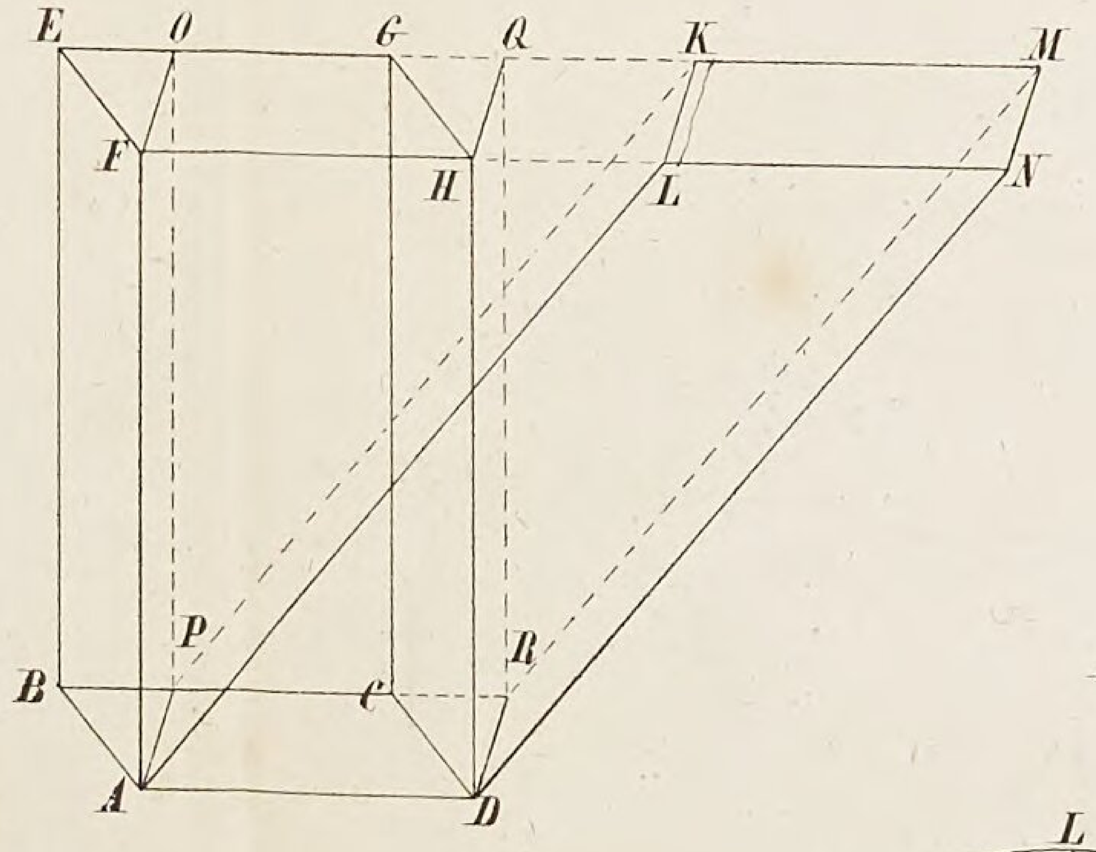


Fig. 100.

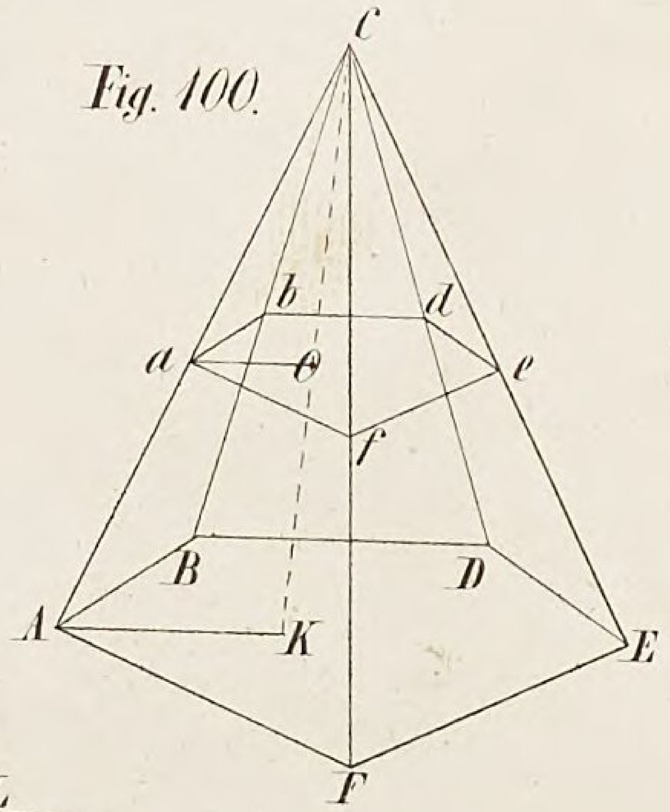


Fig. 101.

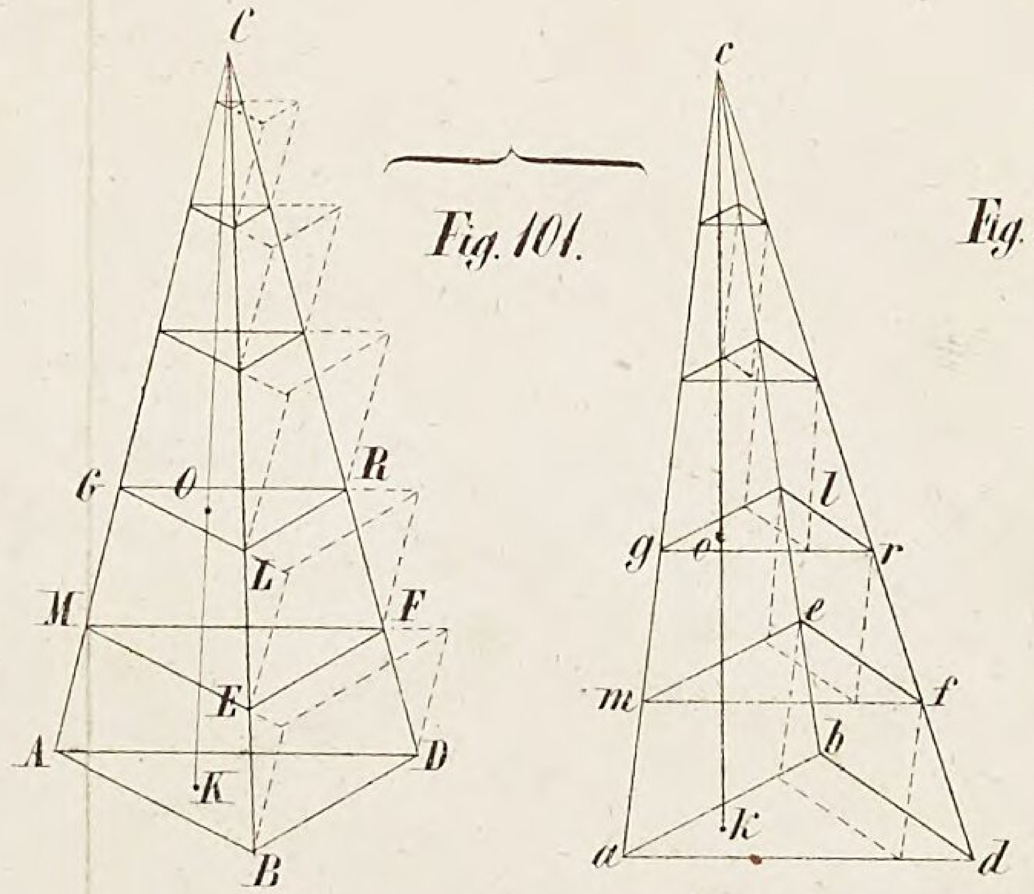


Fig. 102.

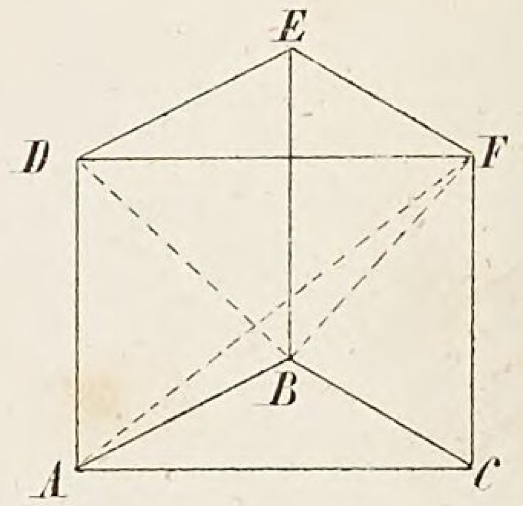


Fig. 103.

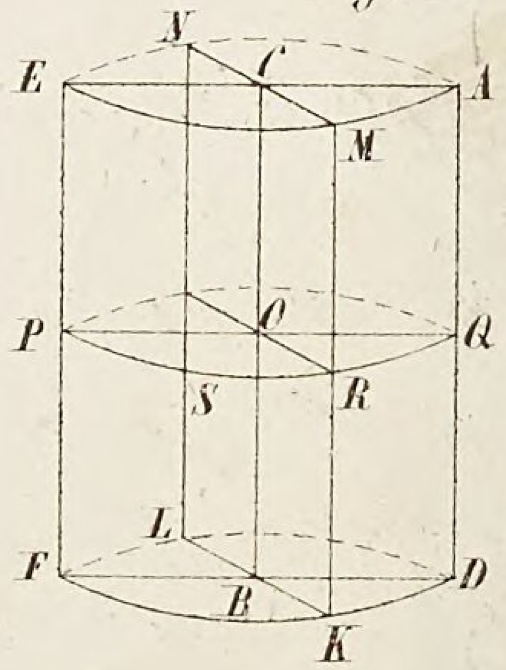
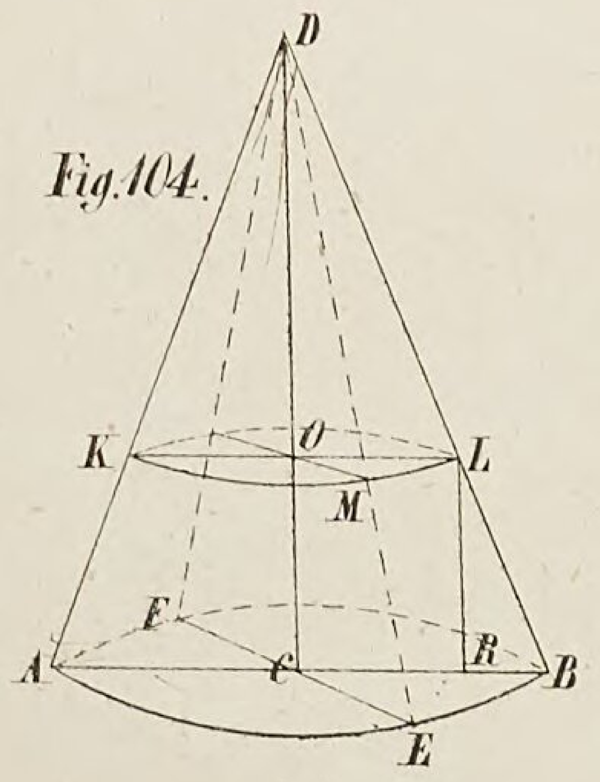


Fig. 104.



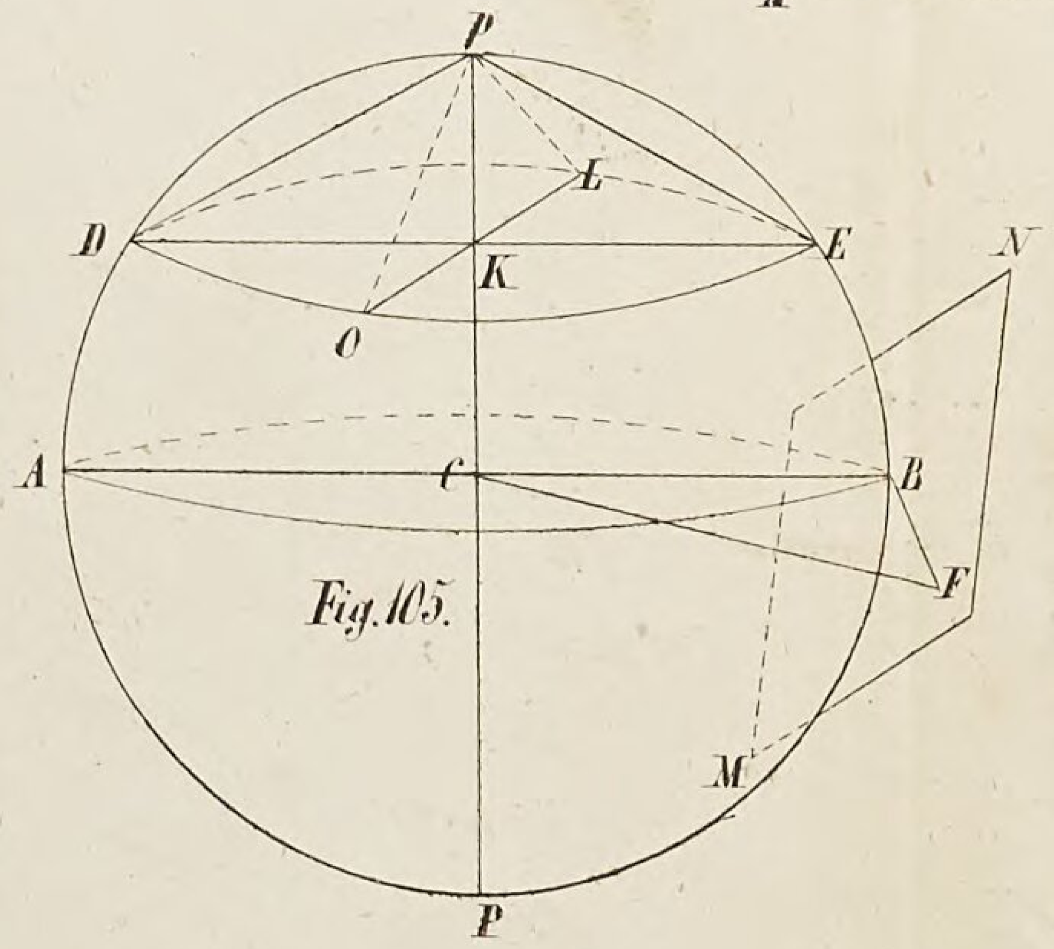
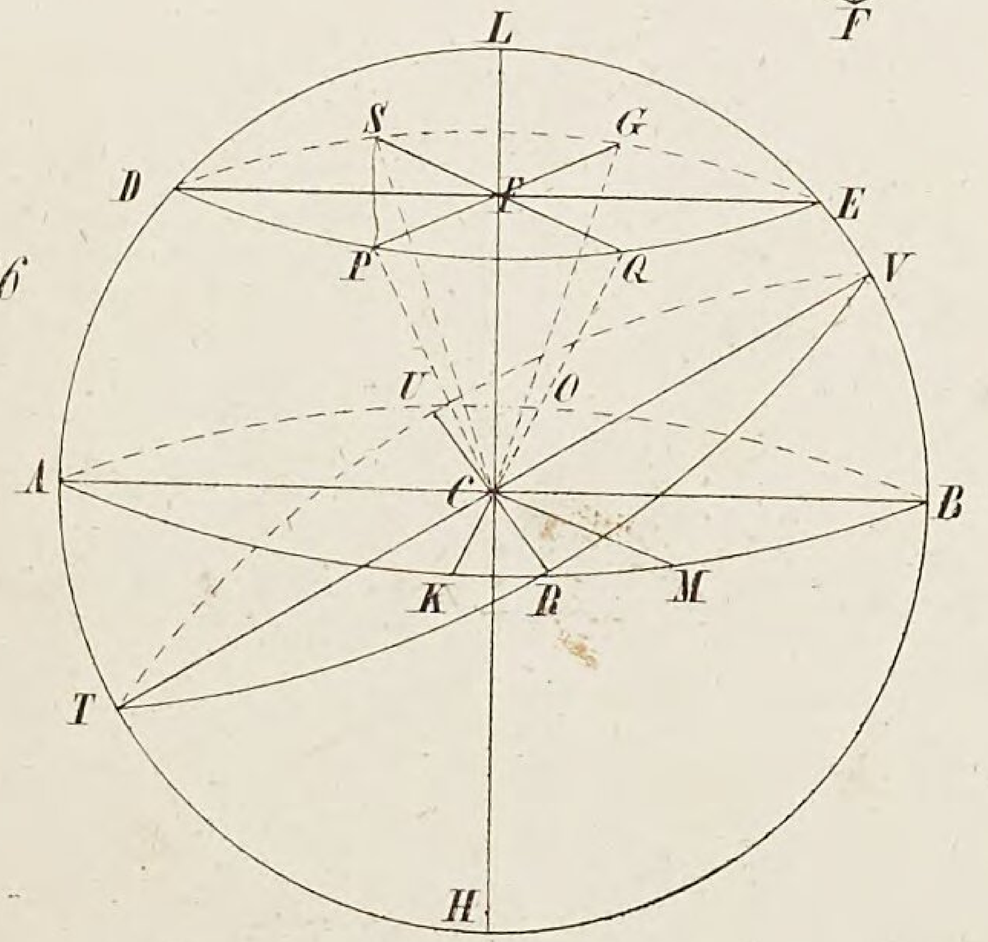


Fig. 105.

Fig. 106



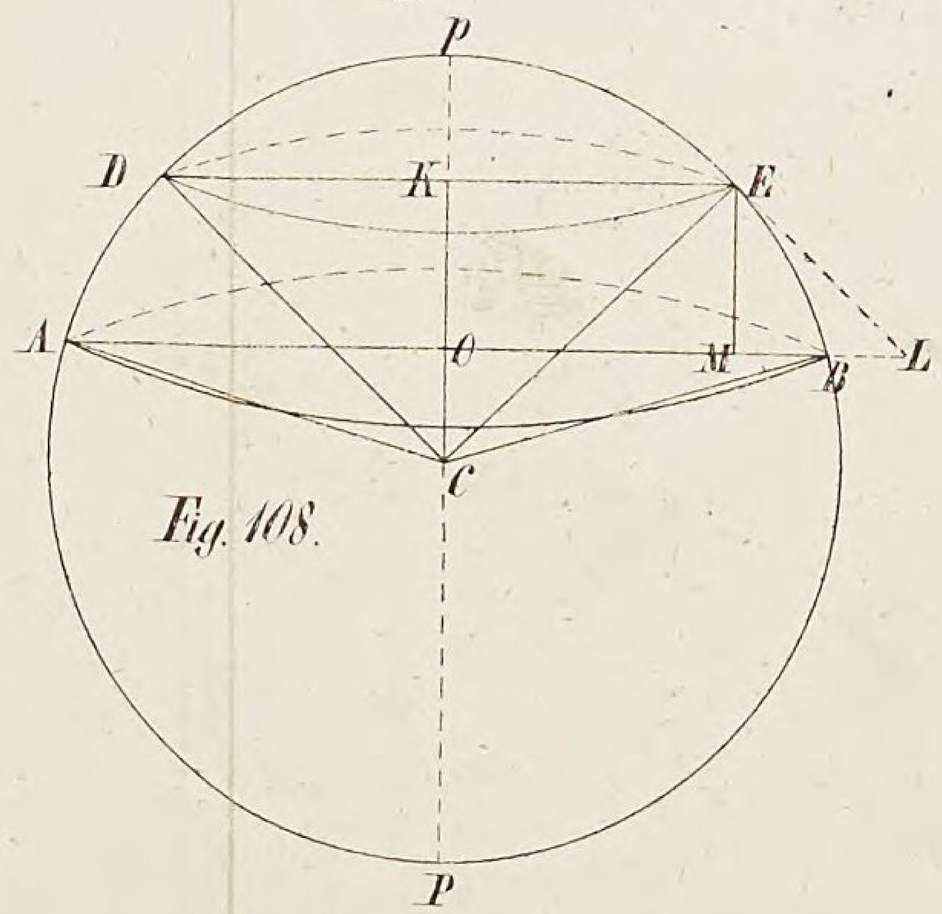
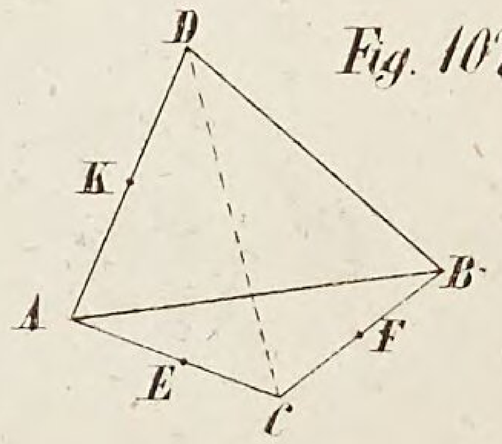
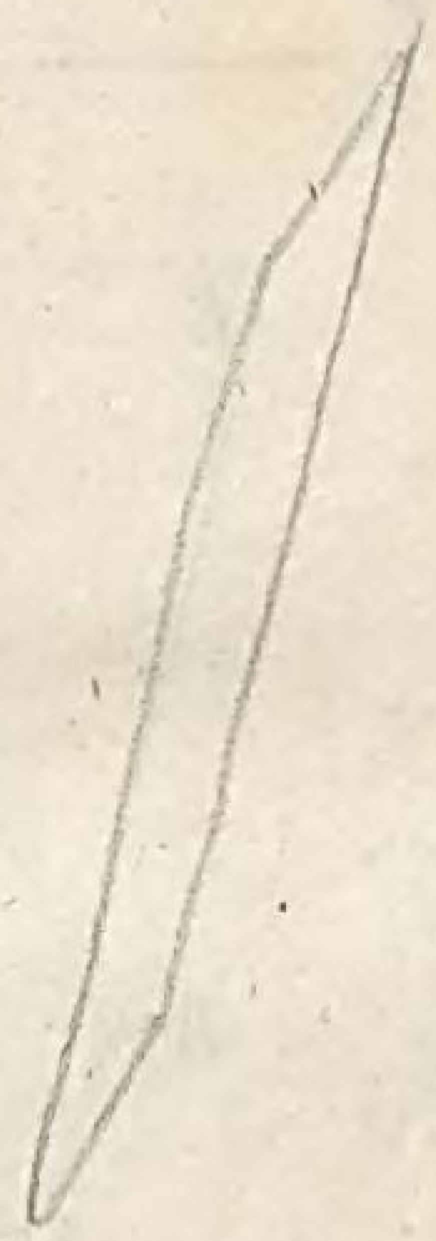


Fig. 108.

Fig. 107.





f 1.57

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Mayer, Georg

Leitfaden zum Unterrichte in der elementaren Mathematik

München 1847

Bamberg, Staatsbibliothek -- Ma.o.40
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11739725-8